

中外物理学精品书系

前沿系列 · 31

物理学中的分形

刘式达　刘式适　编著


北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

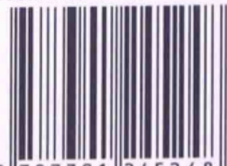
中外物理学精品书系 · 前沿系列 31

物理学中的分形

刘式达 1956—1962年在北京大学物理系、地球物理系学习，毕业后留校任教至今。曾任地球物理系系主任，现为北京大学物理学院教授、博士生导师。主讲“大气湍流”“非线性动力学和湍流”“混沌和分形”等课程。在国内外主要学术刊物上发表论文100多篇。主要著作有《分形和分维引论》《地球流体力学中的数学问题》《孤波和湍流》《非线性大气动力学》《大气涡旋动力学》等。曾获国家自然科学三等奖、光华科技基金奖、国家教委科技进步奖等多项奖励。

刘式适 1956—1962年在北京大学物理系、地球物理系学习，毕业后留校任教至今。现为北京大学物理学院教授、博士生导师。主讲“大气动力学”“特殊函数”“非线性波”等课程。在国内外主要学术刊物上发表论文100多篇。主要著作有《特殊函数》《地球流体力学中的数学问题》《大气动力学》《非线性大气动力学》《大气涡旋动力学》等，其中《大气动力学》获1995年国家教委优秀教材一等奖。曾获国家自然科学三等奖、光华科技基金奖、国家教委科技进步奖等多项奖励。

ISBN 978-7-301-24524-8



定价：57.00元



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 31

物理学中的分形

刘式达　刘式适　编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的分形/刘式达,刘式适编著.—北京:北京大学出版社,2014.7
(中外物理学精品书系·前沿系列)
ISBN 978-7-301-24524-8

Ⅰ.①物… Ⅱ.①刘… ②刘… Ⅲ.①分形学 Ⅳ.①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 158952 号

书　　　名:物理学中的分形
著作责任者:刘式达　刘式适　编著
责 任 编 辑:刘　啸
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-24524-8/O·0977
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
新 浪 微 博:@北京大学出版社
电 子 信 箱:zpup@pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752038
出版部 62754962
印　刷　者:北京中科印刷有限公司
经　销　者:新华书店
730 毫米×980 毫米　16 开本　20.75 印张　396 千字
2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　　价:57.00 元

“中外物理学精品书系”
编 委 会

序　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了"中外物理学精品书系"，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，"中外物理学精品书系"力图完整呈现近现代世界

和中国物理科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套“中外物理学精品书系”的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会　主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010年5月于燕园

内容简介

本书首先介绍了物理学中的分形现象,如连续相变、逾渗、随机游动、$\frac{1}{f}$噪声、生长现象、异常扩散、湍流、气候等,进而引出标度对称性这一重要概念.之后,本书介绍了分数维的物理含义,如临界奇异性、间隙性、级联过程、层次结构等,特别是近代物理学所关注的记忆性.接下来,本书讲解了涉及分形的一些数理基础和概念,如标度变换、重正化变换、函数方程、自相似随机过程、小波变换、多重分形等.本书也介绍了分形在混沌、湍流、时间序列、自组织及自组织临界现象等问题中的研究进展.最后,本书还讲述了分数阶微积分及分数阶动力学.它们是非线性分形物理学的最新研究成果.

本书力求将分形概念物理化,并用直观和相对简单的方法去说明有关分形的概念,使读者能从应用数学的范畴去了解新的物理问题,以便应用于物理学的各个分支领域.

本书可作为理工科大学本科生、研究生的教材和参考书,也可供理工科大学教师和有关科研人员阅读参考.

前　言

自从 1982 年曼德布罗特发表专著 *The Fractal Geometry of Nature* 以来，分形在物理学中的研究蓬勃发展. 1989 年我们撰写的《非线性动力学和复杂现象》一书，就专门有一章介绍分形. 1993 年，我们又写了《分形和分维引论》一书，向国内读者介绍分形. 三十年过去了，能通过《物理学中的分形》一书向读者介绍分形及它在物理学中的研究成果，我们感到很是欣慰.

三十年来分形研究有什么进展呢？

(1) 它已经从几何学的领域扩展至多尺度系统的物理学、气候学、生物学、经济学、复杂网络等领域.

(2) 它已经从简单的维数是分数的概念扩展到研究物理学相变标度律、湍流的多种间隙模型、生物学和经济学等的多种标度关系等.

(3) 它已经从整数阶微积分扩展到分数阶微积分.

(4) 它已经从无记忆系统扩展到有长期记忆性的系统.

以上进展已经使以分形为主要内容的非线性物理学成为当代物理学的重要组成部分.

本书的特色是从物理学中常见的分形现象入手，从而使读者了解分形的物理含义. 本书对分形物理的基础部分——标度变换、迭代函数系统和小波变换等都做了详细的介绍，将物理学中的重正化群变换、湍流的间隙模型、自相似和随机过程、自组织临界现象等都紧密地和分形、分数维相联系.

本书还将分数阶微积分及分数阶动力学引进，以使读者对于这个非线性物理的最新进展有详细的了解.

本书共分为 12 章，第一章介绍物理学中的分形现象，包括相变、逾渗、湍流、地震、气候、异常扩散等. 第二章介绍分数维的物理意义. 除了多尺度的标记、间隙性的表现外，该章还介绍了处处不可微的奇异性及记忆性. 这在一般分形书中是少有的. 第三章介绍标度变换和迭代函数方程，说明幂函数是核心，还介绍了近十年来刚刚出现的分形时空观——尺度的“伽利略变换”和“洛伦兹变换”. 第四章介绍重正化群变换，特别将相变与分岔、突变的奇异性相联系. 第五章介绍宏观尺度和微观尺度分离的布朗运动，以及尺度不能分离的列维运动，从而论述从短程相关到长程相关的过程.

第六章介绍小波变换，着重说明小波变换和分形一样具有标度不变性. 哈尔标度函数由于可以尺度变换及平移，因而可以简洁地用来表示分形. 第七章介绍多重分形，用统计物理中的配分函数来解决物理量不均匀的分形问题. 第八章介绍混沌、湍流和分形、分数维的关系，从而使著名的湍流模型可以用分数维区分开来. 第九章介绍处处连续而不可微的时间序列如何用分形来重构相空间，特别介绍了长记忆性的时间序列. 第十章介绍自组织和自组织临界性以及自然界常见的分形结构. 这些结构都是源于自相似过程. 第十一章介绍分数阶导数的来源，着重从差分的极限入手说明常用的黎曼-刘维尔分数阶导数和积分的表达式是合理的，并特别说明了整数阶导数为零和分数阶导数为零的物理差异. 第十二章主要讲述将传统力学、电学、随机运动的有关动力学方程演变成分数阶的动力学方程的物理.

总之，这 12 章内容全部从物理学出发，数学工具也是为说明多尺度现象而引入，以使之更具体、更合理.

本书得到“中外物理学精品书系”编委会主任王恩哥院士及执行编委张酣教授的大力支持，我们在此表示衷心感谢！

刘式达　刘式适
2014 年 2 月
于北京大学

目　　录

第一章　物理学中的分形现象

分形(fractal)这个词是 1982 年曼德布罗特(B. B. Mandelbrot)提出的，来自于拉丁文 fractus，意思是断裂和碎片．所谓“断裂和碎片”，用现在的术语说就是系统有大大小小不同的“尺度”或“涨落”．而且，这种大小的差别是跨量级的，通常称为无特征尺度现象．这种情况在物理学中已出现过．以铁磁相变为例，当温度降低到临界温度 T_c 时，涨落急剧增加，粒子磁矩之间的相互作用压倒了随机热运动，粒子之间的关联越来越强，从而形成了各种尺度的“集团”和“涨落”，见图 1.1．图 1.1 中各种大大小小“集团”磁矩的排列是基本有序的，但有些“集团”的取向仍是随机的．这里的“尺度”就是指两个相邻磁矩间的距离．在临界点处，这个距离小到晶格常数，大到无穷大，大大小小的尺度都有，所以是一种无特征尺度现象．无特征尺度现象有什么特征呢？简单地说，就是由于尺度跨越好多量级，许多物理量随尺度变化而变化，但却存在不随尺度变化的标度指数和标度律．下面将以多种物理现象来说明．

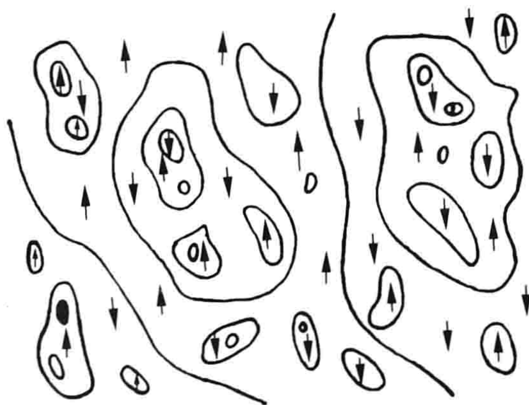


图 1.1　在临界温度 T_c 上磁矩(箭头)的各种“集团”

§1.1　相变和临界指数

物理学中的连续相变是大量粒子的集体效应，一块处于高温下的磁铁，由于热噪声，微观粒子的磁矩杂乱无章地排列着，在宏观上表现不出磁性．但当温度下降到“居里点”的临界温度 T_c 时，突然沿某个方向出现了宏观磁矩，对称性从绕一切可能方向的转动对称，下降到沿宏观磁矩的一个方向的转动对称，出现了

本章开头所说的,大大小小"集团"磁矩排列有序的磁化状态.

我们把铁磁相变看成是大量晶格上自旋相互作用的结果. 图 1.2(a)是原来的晶格. 由于有大大小小的"集团",著名的伊辛(Ising)模型将原来每边两个自旋合起来组成一个小的"集团"的自旋块,如图 1.2(b)中方框所示. 这样就组成了四个小"集团"的自旋块,见图 1.2(c). 类似地,四个小"集团"还可以合起来构成一个较大的"集团". 由于磁矩之间的相互作用完全取决于温度 T,或温度 T

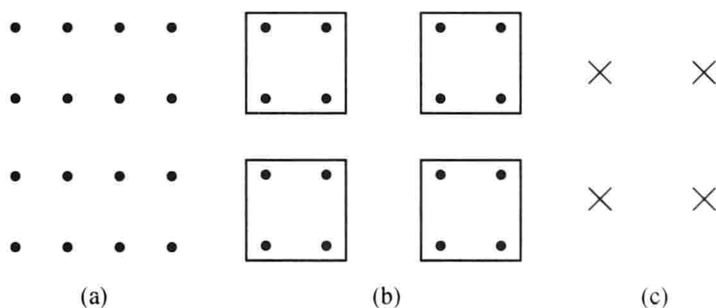


图 1.2 自旋集团模型

和临界温度 T_c 之差

$$T-T_c, \tag{1.1}$$

因此 $T-T_c$ 就是一把"尺子".

现在图 1.2(c)的小晶格"集团"之间的距离比原来晶格图 1.2(a)大了一倍,即尺子由原来的 $T-T_c$ 变成了 $\lambda(T-T_c)$,相当于做了一个尺度变换

$$(T-T_c)\rightarrow\lambda(T-T_c), \quad \lambda=2, \tag{1.2}$$

那么磁矩之间的关联程度就变弱了. 我们用 ξ 表示两个关联自旋的距离,它称为关联长度.

"尺子"扩大到了 λ 倍,关联长度却缩小到了原来的 $\lambda^{-\nu}\left(为\frac{1}{2}\right)$,即

$$\xi[\lambda(T-T_c)]=\lambda^{-\nu}\xi(T-T_c). \tag{1.3}$$

(1.3)式说明,在铁磁体中描述磁矩相互作用的物理量相干长度 ξ,随着尺子 $(T-T_c)$ 长度的变化而变化. 这种"尺子"可以跨越好多量级. 到 $T=T_c$ 时,关联长度为无穷大. 因此,这一系统可以说是一个没有特征尺度的系统.

容易验证(1.3)式的解是

$$\xi(T)=(T-T_c)^{-\nu}, \tag{1.4}$$

其中 ν 称为临界指数.

由(1.3)式,得到

$$\frac{1}{2}=\lambda^{-\nu}, \tag{1.5}$$

因此求得

$$\nu=\frac{\ln 2}{\ln \lambda}. \tag{1.6}$$

(1.6)式说明，关联长度ξ随尺子变化而变化，但无论尺子如何变，临界指数ν是不变的．这就称为标度不变性．式子(1.3)式称为标度律．

(1.4)式从物理上说明，在临界点$T=T_c$处，关联长度ξ总是无穷大．自旋为一种取向的“集团”连成一片，占有优势，铁磁体变成了磁体．铁磁体则由自旋格子中取向的各向同性的对称，降低到有一个特定的方向取向．这种过程称为对称破缺．

以上说明，相变现象中，在临界点处各种尺度的涨落都有，是一种无特征尺度的分形现象，关联长度ξ随尺子的长度变化而变化，但临界指数不变．

§1.2　湍流涡旋

大家知道，湍流现象中常伴有大大小小各种尺度的涡旋．在对流滚滚的雷雨云中，小涡旋的尺度只有几厘米，而大涡旋的尺度可达数千米，尺度跨越5～6个量级．和上节中的大大小小的磁矩“集团”类似，这也是一种无特征尺度现象．我们设想一个大涡旋是一个单位正方形的旋涡，见图1.3．它在湍流中不断分裂出小涡旋．如第一步它分成三个边长为$\frac{1}{2}$的小正方形的涡旋，之后每个小涡旋又分成边长为$\left(\frac{1}{2}\right)^2$的三个更小的涡旋，这样的分裂过程一直持续下去，这种过程称为级联(cascade)过程．

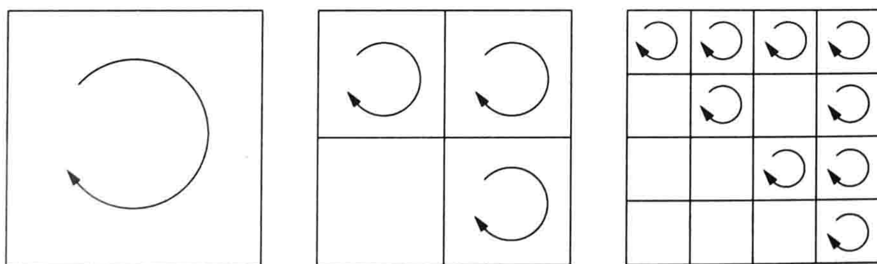


图1.3　大涡旋分成小涡旋的级联过程

显然涡旋的个数随着尺度减小而增多．但涡旋的总面积S则随着尺度r的减小而减小．设涡旋面积$S(r)$和尺度r的关系为

$$S(r)=r^{\mu}, \tag{1.7}$$

涡旋分裂n次后，由图1.3容易得到

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^{\mu}. \tag{1.8}$$

将(1.8)式两边取对数,求得

$$\mu=2-\frac{\ln3}{\ln2}. \tag{1.9}$$

(1.9)式说明,尽管涡旋面积 S 随尺度变化而变化,但是指数 μ 不变.

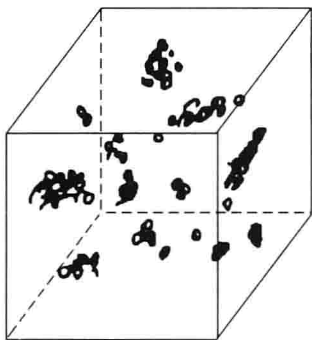


图 1.4 湍流的间歇性

由于随尺度的减小涡旋的面积也减小,表明小涡旋在单位正方形中的概率 $p(r)$ 也越来越小. 若将上面的结果推广到三维立方体,那么由于这种大涡旋分裂成小涡旋的级联过程,最后在三维空间中,就好像只在空间的某些点上有强度很大的涡旋,见图 1.4.

这种小涡旋并不充满空间的状态,称为湍流的间歇性. 第八章将仔细地讨论类似于相变临界指数的湍流能谱的科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)指数.

这一节说明,湍流也是一种分形现象.

§1.3 逾渗(渗流)

当雨落到地面后,雨水要经过土壤中的土块才能渗透到较深的地下. 小土块只有细沙那样小,大土块可以很大到数十米,雨水只能慢慢地从大大小小土块的夹缝中逐渐流下去. 雨水向下流通的问题就好比图 1.5 的一个很大的方块,其中放上了一些导电的小黑球. 若放的很少,也就是说它占据方块的概率 p 很小,此时小黑球只能零散地占据着方块的各点. 但是随着方块中的小黑球的增多,方块中就出现了大大小小的黑球"集团",就如同自旋晶格的"集团". 当小黑球占据的概率 p 超过一个临界值 p_c 后,黑球有的地方开始连通,就好比水开始渗透到较深的地下了.

图 1.5(a),(b),(c)分别是大方格中黑球的占据概率 $p=0.35<p_c$,$p=p_c=0.5$ 和 $p=0.65>p_c$ 的大小黑球"集团".

导电的黑球随机地掺在白球中间,占据概率 p 由 0 增加到 1 的过程中,每个 p 对应一定的连通概率. 当 p 刚接近于 p_c 时,黑球连通的概率 P 很小,但是超过 p_c 的值较大时,连通概率 P 就增大很快. 通常黑球连通的概率 P 可表示为连通概率 $P\propto(p-p_c)^{\beta}$,其中 β 也称为"临界指数".

连通概率随 p 的变化,见图 1.6.

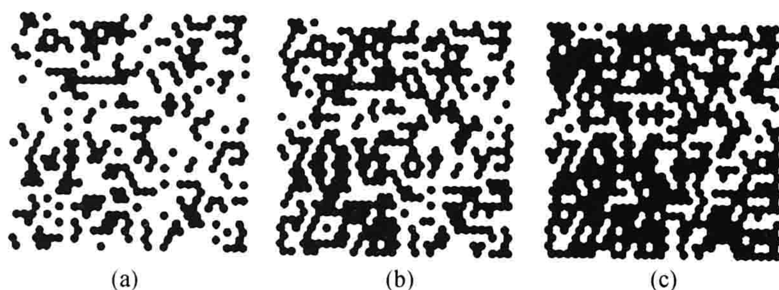


图 1.5　黑球占据概率 p 不同时的大小"集团"

(a) $p=0.35<p_c$;(b) $p=p_c=0.5$;(c) $p=0.65>p_c$.

引自 H. O. Peitgen(1992)

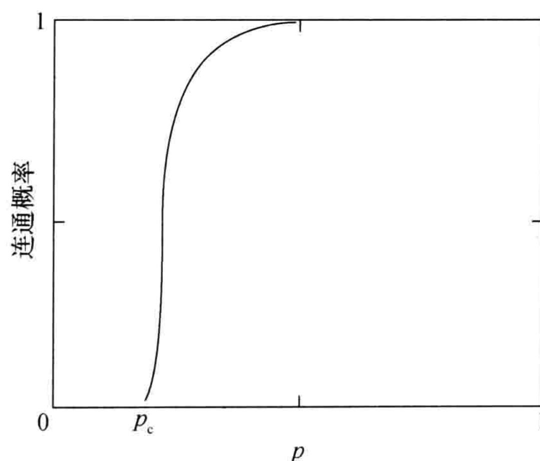


图 1.6　逾渗问题的连通概率

我们用 ξ 表示导电黑球"集团"的平均尺度,也称关联长度. 在 $p<p_c$ 时,黑球"集团"的平均尺寸 ξ 很小. 但 $p=p_c$ 时,黑球"集团"出现了导通"无穷大"集团. 当 $p>p_c$,平均尺度 ξ 也很小,这是因为此时将"无穷大"黑点"集团"扣除后,只剩下导通的"孤岛"了. ξ 随 p 变化见图 1.7. 此时关联长度 ξ 可以表示为

$$\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}, \tag{1.10}$$

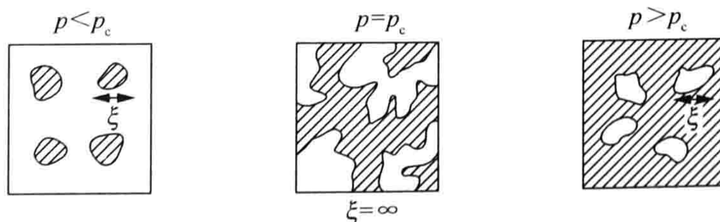


图 1.7　逾渗中关联长度 ξ 随 p 的变化

或连通概率 P 和关联长度关系为

$$P \propto \xi^{-\frac{\beta}{\nu}}.$$

将(1.10)式和(1.4)式比较看出,关联长度“集团”有大有小,它们随着$(p-p_c)$不同而不同,在 $p \to p_c$ 时关联长度达到无穷大,而临界指数 ν 不变.

逾渗现象中,黑球占据的集团有大有小,也是一种无特征尺度的分形现象,但却存在随尺度变化而不变的(1.10)式中的指数 ν.

§ 1.4 $\frac{1}{f}$噪声

在半导体、晶体二极管等许多物理学系统中都有噪声.对它们做傅里叶变换,以频率 f 的对数作为横坐标,以电流功率谱 $S(f)$的对数 $\ln S$ 作为纵坐标,则噪声功率谱近似是一条直线,见图 1.8.

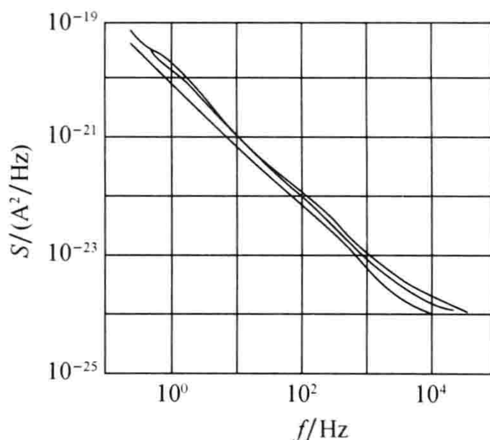


图 1.8 $\frac{1}{f}$噪声功率谱

引自 D. Wolf(1978)

设图 1.8 中直线的斜率是$-\beta$,即功率谱可以写成

$$S(f) \propto f^{-\beta} = \frac{1}{f^{\beta}}, \tag{1.11}$$

其中 β 称为功率谱指数,则功率谱为(1.11)形式的噪声就称为$\frac{1}{f}$噪声.

从图 1.8 看出,频率 f 跨越四个量级的尺度.也就是说,功率谱 $S(f)$这个物理量随尺度变化而变化,但是功率谱指数 β 不变.这当然又是一个分形现象.

在(1.11)式中,当 $\beta=0$ 时,双对数坐标系中的功率谱曲线是一个水平线,此时功率谱 $S(f)$不随 f 变化,称为白噪声.而当 $\beta=2$ 时,该噪声称为布朗(或褐色)噪声.

说来也巧，世界上最著名的乐曲，如贝多芬的交响乐、施特劳斯的乐曲等曲调，也都具有$\frac{1}{f}$噪声特性，见图 1.9(a)，(b)．图中显示出，无论东方还是西方音乐，它们的频率范围都跨好几个量级．

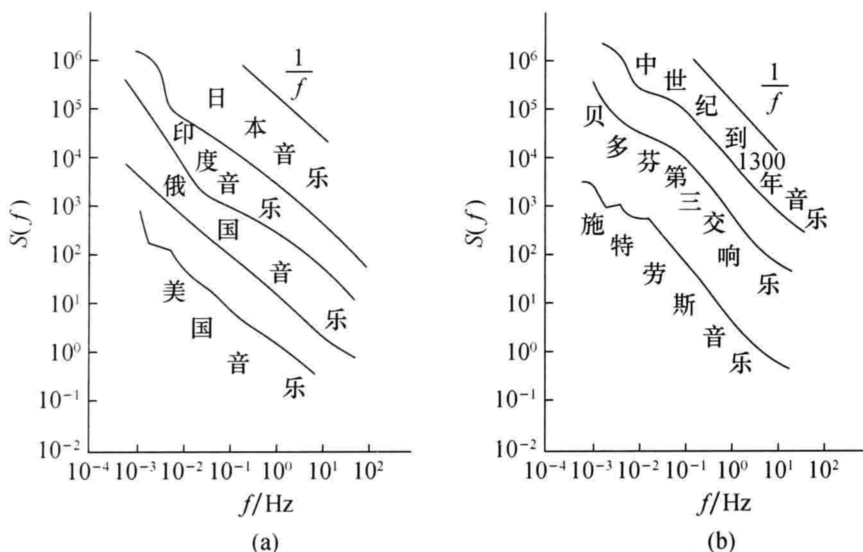


图 1.9　$\frac{1}{f}$音乐

(a) 东方、俄国、美国音乐的功率谱；(b) 西欧音乐的功率谱

将频率 f 扩大λ 倍后的功率谱 $S(\lambda f)$和未扩大时的功率谱 $S(f)$之间的关系由(1.11)式，为

$$S(\lambda f)=(\lambda f)^{-\beta}=\lambda^{-\beta}S(f), \tag{1.12}$$

也就是说 $S(\lambda f)$在双对数坐标图上斜率仍是$-\beta$．(1.12)式是$\frac{1}{f}$噪声的标度律．

(1.12)式说明，把音乐录下来后，若改变磁带的速度，只要调节音量(功率)，就可以从扬声器得到和以前“同样的声音”．$\frac{1}{f}$噪声也称为赫斯特(Hurst)噪声或标度噪声．

§1.5　雪花形成及生长现象

雪花是从云中落下的．通常云中会有冻结核，还有很多过冷的水汽，它们不断地在冻结核周围冻结，又产生出许多新的冻结核．由于水汽冻结要释放出潜热，并由水汽和冰核的交界面扩散而输送出去，交界面积就需要足够大，因此交界面的形状是向外呈树枝状凸出．交界面一旦凸出，水汽就喜欢在交界面凸出



图 1.10 雪花的形状

部分登陆并冻结.这样不断冻结生长,就形成了六角形树枝状的雪花,见图 1.10.冰晶的尺寸通常是 $10^{-1}\sim 10^{0}\,\mu$m 量级,长成的雪花可达毫米到厘米量级,其尺度范围也跨越好几个量级,因而是一个无特征尺度现象.随着雪花的生长,其六角形所占面积越来越大,但也没有充满整个空间.

为了说明这一点,我们设想一个边长为 1 的正三角形,如果在每一个边上长出一个边长为$\frac{1}{3}$的小三角形,就形成一个六角形.若再在六角形的每个边上长出边长为$\left(\frac{1}{3}\right)^2$的 12 个小三角形,这种级联过程一直下去,就得到图 1.11 的六角形雪花,称为科赫(Koch)雪花.

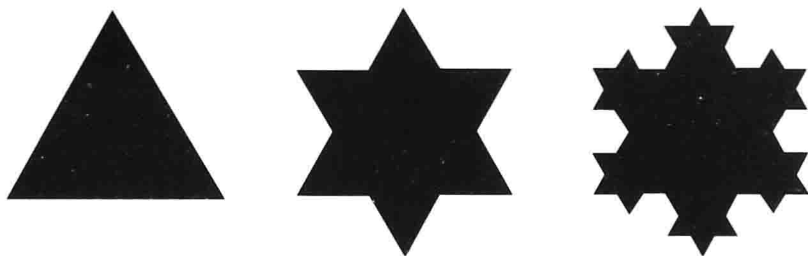


图 1.11 六角形雪花

设 n 是步数,那么第 $n=1$ 步为边长 $r_1=1$ 的一个三角形(3 个边).到 $n=2$ 步,增加了边长为 $r_2=\frac{1}{3}$的 3 个三角形(12 个边).第 $n=3$ 步,增加了边长为 $r_3=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 的 12 个小三角形(48 个边).第 n 步,雪花有 $3\times 4^{n-1}$ 个长为$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$的边.设第 n 步六角形雪花的周长 $c_n=r_nN$ 和边长 r_n 的关系为

$$c_n=r_n^{\mu}, \tag{1.13}$$

其中 N 是边长的数目,那么将 $N=3\times 4^{n-1}$ 和 $r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 代入(1.13)式,得

$$\begin{aligned}\mu &= \ln\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)\Big/\ln\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)\\ &= \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{1}{3}},\end{aligned} \tag{1.14}$$

所以

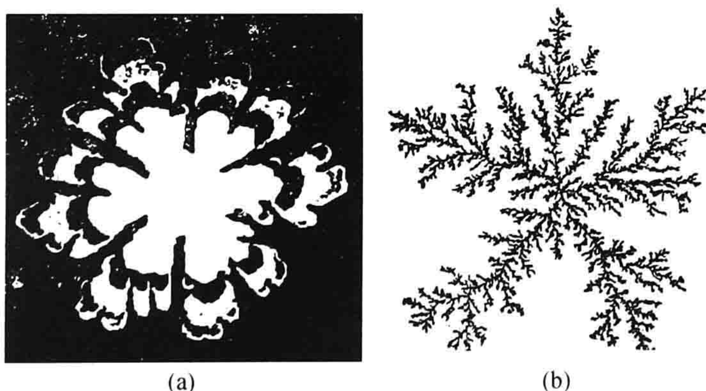
$$\mu=\frac{\ln4-\ln3}{-\ln3}=1-\frac{\ln4}{\ln3}. \tag{1.15}$$

(1.13)式说明雪花的周长随着尺寸减小而不断增加，但是存在不变的指数 μ.

除了雪花形成之外，在物理学中还有许多生长现象，如树状凝结、介电击穿、电化学沉积、材料的龟裂等.

低黏性流体(例如水)在压力下注入高黏性流体(例如油)中，两种流体非常大的黏性差别和交界面上的表面张力会使油像树枝一样扩散出来，这种黏性指进(viscous fingering)也是一种生长现象.

图 1.12(a)是黏性指进的结构图样，图 1.12(b)是用有限扩散凝聚(diffusion-limited aggregation，DLA)模型模拟出的生长图像. 这里的 DLA 方法，首先给一个"种子"，然后再在离"种子"较远处，以随机游动的方法送一个粒子，直到和"种子"连接为止，这个过程重复下去，逐步聚集成粒子集团.



(a) (b)

图 1.12 生长现象

(a) 黏性指进；(b) DLA 模拟

与雪花形成一样，生长现象都是从一粒种子开始随时间长大的. 种子的尺度很小，生长出的结果像一棵高大的"树木". 从种子尺寸到"大树"尺寸相差好多量级，是一种无特征尺度分形现象，且物理量(例如生长的质量)随尺度的变化而变化，但却会出现随尺度不变化的标度指数，像雪花形成的(1.15)式中的 μ.

物理上我们最关心的是，为什么新生长的粒子多数聚集在生长集团的尖端附近，而只有极少量的新生长的粒子进入到树枝间的沟中. 也就是说越是尖端的地方生长越快，越是平坦的地方生长得越慢. 正是由于这种性质，才使得生长出的"树"没有充满空间.

这种性质使我们想起静电学中导体表面的电场分布. 导体表面越突出的地方，等电位场线越密，因而电场强度越大；表面越平滑的部分，等位线越疏，电场强度越小.

§1.6 地 震

地震是由于地球最外面的地壳板块沿断层相互连接在一起，当相邻板块间的应力达到一定水平，板块之间由于固体摩擦而支撑的状况再也不能维持时，就发生板块的滑动而造成的.

当板块滑动时，要释放出能量 E，我们就用释放的能量来量度地震的强度. 板块间的断层长度不同，产生的地震释放的能量也不同. 通常将地震分级，每级地震的能量差 30 倍.

图 1.13 是 1995 年的 365 天中地震发生时释放的能量. 从图 1.13 看出，全球每年发生 8 级以上地震的次数为 1～2(10^0)，而发生 7 级以上地震的次数约为 10(10^1).

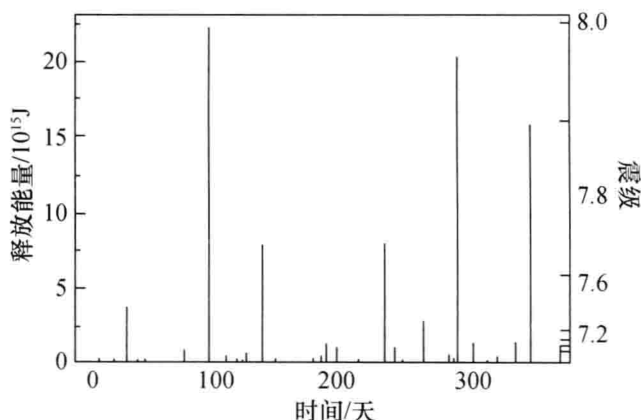


图 1.13 1995 年 365 天中地震释放出的能量

地震释放出的能量 E 是物理量. 从 1 级地震到 8 级地震，能量差 10^8 倍. 我们把地震释放出来的能量看成尺度，显然这是一个无特征尺度现象. 大地震发生的次数少，小地震发生的次数多，因此地震的次数随尺度变化而变化. 但是，是否有随尺度(地震能量或地震级)变化而不变的量呢? 图 1.14 是 1995 年冬各级地震发生次数的直方图. 若以 n 表示地震发生的次数，M 表示地震震级，从图 1.14 看出，

$$\ln n = a - bM, \quad b = \frac{2}{3}, \tag{1.16}$$

所以，以震级 M 为横坐标，$\ln n$ 为纵坐标，$\ln n$ 和 M 的关系成直线，斜率为 $-\frac{2}{3}$. 从图 1.14 看出，上面横轴是能量 E 的对数，下面横轴是震级 M，所以能量 E 和震级之间有如下关系：

$$\ln E \propto M. \tag{1.17}$$

将(1.16)式中的 M 换成 $\ln E$，地震次数 n 和能量的关系为

$$n \propto E^{-\frac{2}{3}}, \tag{1.18}$$

见图 1.14.

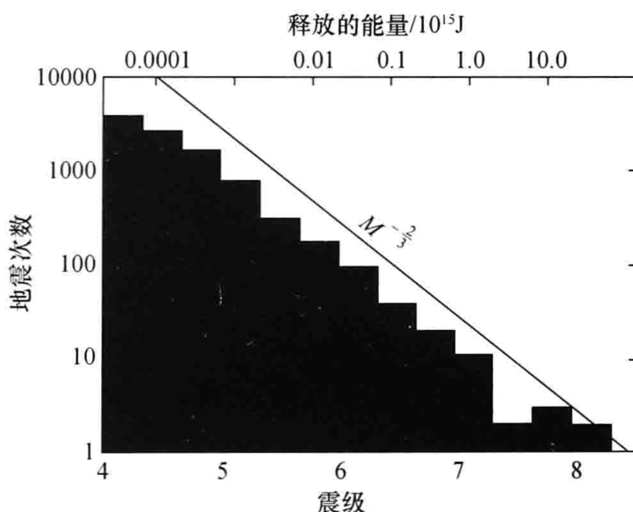


图 1.14　1995 年地震发生次数随震级变化的直方图

从公式(1.18)看出，地震次数 n 随震级 M 所代表的能量 E 而变化，但是标度指数 $-\frac{2}{3}$ 却不变，这就是著名的地震发生级数的古滕贝格-里希特(Gutenberg-Richter)关系.

公式(1.18)的意义可由图 1.14 看出. 在 1995 年中能量为 1×10^{15} J 的 7 级地震大约发生 10 次，而比它能量小 $\frac{1}{10}$ 的 0.1×10^{15} J 的地震发生的次数大约是 100 次. 能量小 $\frac{1}{10}$，地震次数就增加 10 倍.

地震发生的次数如此有规律，这使得人们猜想，大、小地震的发生是否出于同样的机理. 这种机理就是自组织临界性(self-organized criticality，简称 SOC). 它说明地球的板块始终处于临界状态，小地震天天有，也就是说板块经常发生小的滑动. 这种小的滑动将释放的能量传递给周围板块，造成能量的不断积累，就有可能发生大的地震. 关于自组织临界现象我们将在第十章讨论.

§1.7　气　　候

近 20～30 年，世界各国都非常重视"气候变化"这个课题. 目前流行的一种

说法是“现在气候变暖了”. 粗看一下，现在的温度的确是升高了. 温度这个概念是在热力学中提出的. 温度有高有低这是常识，因此认为气候有时冷有时暖这也是正常的. 但是下面我们将看到，离开时间尺度谈气候的冷暖是毫无意义的. 根本原因是气候是一个多尺度的系统，月变化、季变化都是气候研究的尺度，年变化、十年变化也可称为气候，百年、万年的变化也可称为气候. 因此，气候现象中会有大大小小不同的时间尺度，因此是无特征尺度现象.

图 1.15 表明气候位势随温度的变化，两个大的气候位势槽分别代表气候的冷和暖的状态，也可以代表气候旱和涝的状态. 两个大槽表示时间尺度比较长(例如千年尺度)的两个气候状态. 要知道千年尺度上的大槽中还会有百年尺度上的小槽，和年际尺度上的更小的槽. 因此对时间尺度较长的大槽来讲，若现在处在右端的大槽中，这就是说气候处在较暖的状态. 但是在这个较宽的大槽中还会有较小的小槽 a 和 b 等. 若现在处于较暖大槽中的 b 槽内，在小尺度上看，b 槽的温度比 a 槽温度偏低，因此在这个尺度上讲，大槽中的 b 点处于冷期. 究竟现在是暖还是冷呢？正确的说法，从较长尺度上(例如千年)讲现在处于暖期，但从较小尺度上讲(例如百年)，现在处于冷期. 所以离开尺度谈气候的冷和暖是毫无意义的.

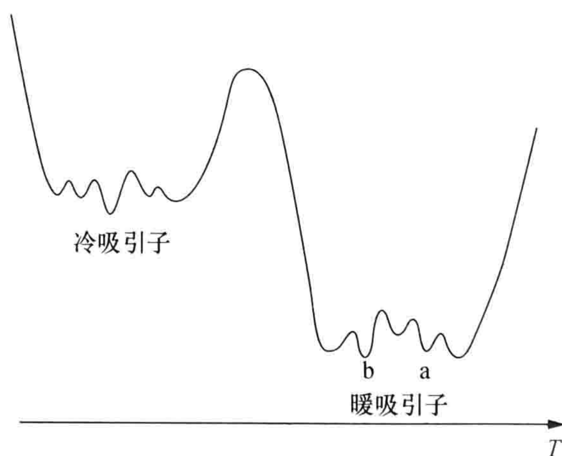


图 1.15　气候层次

图 1.16 是从 1851 年到 1984 年的北半球地表平均温度经过小波变换的结果. 从图 1.16 看出，10^2 年尺度上 1920 年以后气候是暖的，1920 年以前是冷的，但是 50 年尺度上，10^2 年的尺度上的暖区和冷区又各分别有两个暖区和一个冷区，其中 1954 年到 1976 年属于冷区，因此问 1954 年到 1976 年气候是暖还是冷？你只能说在百年尺度上是暖，在 50 年尺度上是冷. 离开尺度谈气候的冷暖是不合适的.

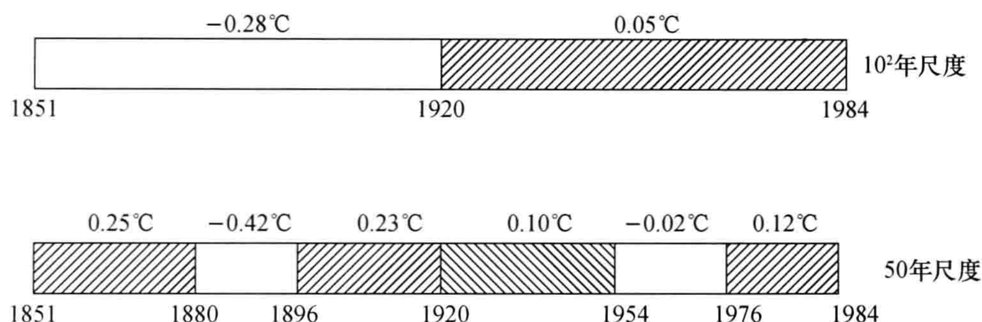


图 1.16 北半球两种尺度上的冷暖转换时间及距平值

从图 1.16 还可看出，由冷转暖和由暖转冷的转换点(转换时间)的数目随着尺度的减小而增多. 转换点的数目随尺度变化而变化，从另一角度说明气候的冷暖随尺度变化而变化，这是无特征尺度的标记.

为了更全面地研究气候转换点随尺度的变化，我们在图 1.17 中给出了北半球气候月平均资料的小波变换，各种尺度 a 下的转换时间. 图 1.17 的横坐标是时间 t，纵坐标是尺度 a. 图中的点是由冷转暖和由暖转冷的时间. 我们从图 1.17 中考察气候的冷变暖，或暖变冷的转换时刻(或称为气候突变点)的个数 N，看它是如何随尺度 a 变化的.

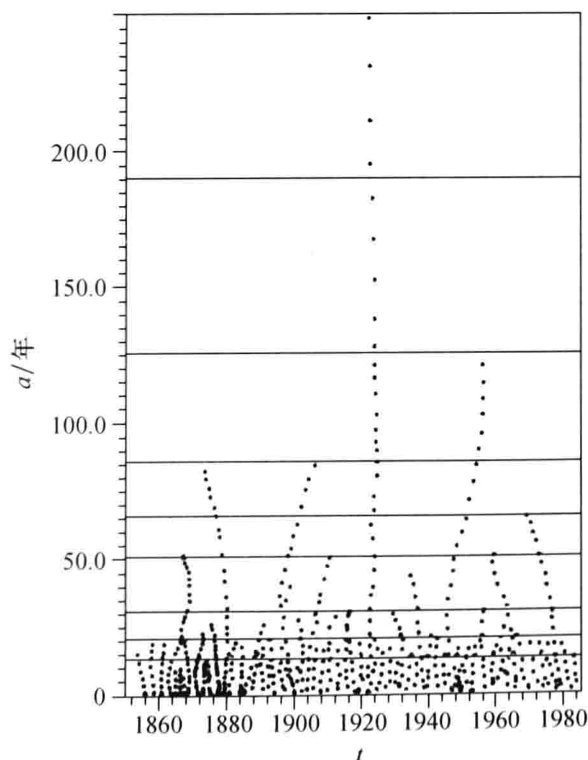


图 1.17 多尺度的气候状态

我们由图 1.17 的上面往下看，记下突变点个数开始变化的尺度 a，它在图 1.17 中就是水平横直线所表示的尺度，并数下这条横线上突变点的个数，如表 1.1 所示.

表 1.1　在时间尺度 a 上，气候突变点的个数 N

a_i	124	85	67	50	30	20	13
N	2	3	5	8	13	21	34

从表 1.1 看出，相邻两个尺度之比为

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} \approx 1.5 = \delta. \tag{1.19}$$

表 1.1 中 N 的前几个数近似为斐波那契(Fibonacci)数的前几个数，因而相邻两个转换点个数之比为

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} \approx 1.618 = \alpha. \tag{1.20}$$

(1.19)式和(1.20)式说明，尺度 a 扩大 $\delta = 1.5$ 倍，那么气候转换点数目减小为 $\frac{1}{\alpha}$，用式子表达为

$$N(\delta a) = \frac{1}{\alpha} N(a) = \delta^{-\tau} N(a). \tag{1.21}$$

(1.21)式的解为

$$N(a) = a^{-\tau}. \tag{1.22}$$

由(1.21)式，求得

$$\tau = \frac{\ln\alpha}{\ln\delta} = \frac{\ln 1.618}{\ln 1.5} \approx 1.187. \tag{1.23}$$

(1.22)式说明，气候的冷暖转换点个数随尺度变化而变化，但(1.22)式中的标度指数 τ 不变.

§1.8　异常扩散

物理学中的扩散研究起源于 1827 年布朗(Brown)观测到的在液体中花粉粒子的杂乱无章的运动. 由于随机游动，液体中的花粉便扩散开来. 20 世纪爱因斯坦(Einstein)和朗之万(Langevin)对布朗运动的研究做出了杰出的贡献，但是实际生活中的扩散(例如在空气中)并不像布朗运动，仅受液体中分子运动的影响，花粉随机地某一方向走一小步. 由于空气中既有风，又有大大小小不同尺度的涡旋，使被扩散的物质(例如烟囱中排放出的 SO_2)每一步游动的距离 Δx 和下一步开始游动的等待时间 Δt 都是有大有小，甚至 Δx 和 Δt 可以跨好几个量级，见图 1.18. 因此，这种游动是一种无特征尺度的分形现象.

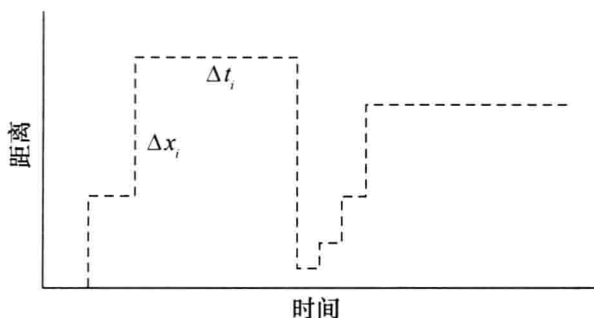


图 1.18 随机游动的距离和等待时间都可以差别很大

布朗运动是由分子杂乱无章的碰撞所引起的，通常称为正常扩散. 但是游动距离 Δx 以及等待时间 Δt 是跨越多尺度的无特征尺度现象，通常称为异常扩散.

通常认为大的等待时间以及大的游动距离出现的概率 p 较小. 若以时间 t 和 x 分别表示等待时间和游动距离，那么等待时间 t 和游动距离 x 的概率通常设为以下形式：

$$p(t)\propto\frac{1}{t^{1+\gamma}},\quad p(x)\propto\frac{1}{x^{1+\alpha}}, \tag{1.24}$$

其中 $\gamma>0,\alpha>0$ 是常数. (1.24)式的概率分布是幂律函数形式，通常称为列维(Levy)分布.

对于不同的 γ 和 α，其扩散情况不同. 当 $\gamma>1$ 时，按(1.24)式求出的平均等待时间或一阶矩为

$$\begin{aligned}\langle T\rangle&=\int_0^\infty tp(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty tt^{-(1+\gamma)}\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty t^{-\gamma}\mathrm{d}t=\frac{t^{-\gamma+1}}{(-\gamma+1)}\bigg|_0^\infty.\end{aligned} \tag{1.25}$$

由于 $\gamma>1$，平均时间 $\langle T\rangle$ 是有限的. 当 $\alpha\geqslant2$ 时，按(1.24)式求出的游动距离方差(即二阶矩)为

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle&=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)x^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{-(1+\alpha)}x^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{1-\alpha}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}.\end{aligned} \tag{1.26}$$

由(1.26)式看出，方差也是有限的. 因此 $\gamma>1,\alpha\geqslant2$ 属于正常扩散的范畴，详见第五章. 此时扩散方差为

$$\langle x^2 \rangle \propto t. \tag{1.27}$$

(1.27)式就是布朗运动的扩散方差.

对于 $\gamma>1, 0<\alpha<2$,此时游动距离的二阶矩由(1.26)式可以看出是发散的,即

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^{\frac{2}{\alpha}}. \tag{1.28}$$

这样的扩散称为异常扩散,也称为列维扩散,详见第五章.

对于 $0<\gamma<1, \alpha>2$,此时游动的平均等待时间是发散的,游动距离方差为

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^{\gamma}. \tag{1.29}$$

这种扩散称为亚扩散.

对于 $0<\gamma<1, 0<\alpha<2$,此时平均的等待时间和游动距离方差都发散,且

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^{\frac{2\gamma}{\alpha}}. \tag{1.30}$$

这种扩散称为矛盾(ambivalent)扩散过程.

表 1.2 列出四种扩散的特征,我们并不做详细的推导.

表 1.2 四种扩散的不同特征及应用的领域

$\gamma>1$	$\alpha>2$	$\langle x^2(t)\rangle \sim t$	正常扩散	均匀介质
$\gamma>1$	$0<\alpha\leqslant 2$	$\langle x^2(t)\rangle \sim t^{2/\alpha}$	列维异常扩散	湍流、等离子体、多分子
$0<\gamma<1$	$\alpha>2$	$\langle x^2(t)\rangle \sim t^{\gamma}$	亚扩散	无序固体、生物介质、分形介质、多孔介质
$0<\gamma<1$	$0<\alpha\leqslant 2$	$\langle x^2(t)\rangle \sim t^{2\gamma/\alpha}$	矛盾扩散	

图 1.19 画出了正常扩散和异常扩散的随机游动图像.

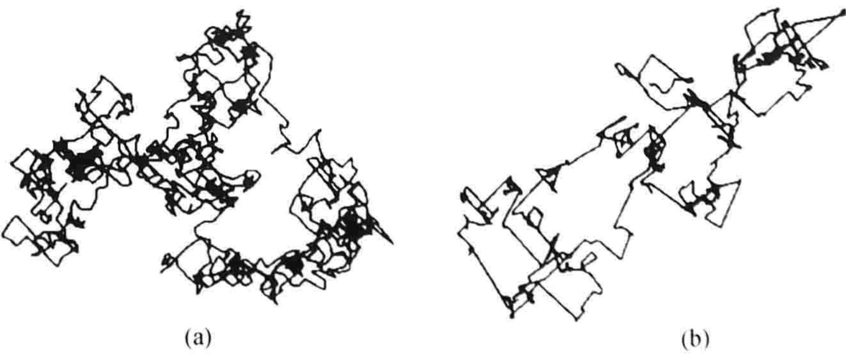


图 1.19

(a) 正常扩散;(b) 异常扩散的轨迹

小 结

物理学中有许许多多无特征尺度的分形现象，从相变到湍流，从逾渗到$\frac{1}{f}$噪声，从雪花到生长现象，从地震、气候到异常扩散等．在这些分形现象中尺度或其他物理量跨越很多量级，它们随尺度的变化而变化，但是存在随尺度变化而不变的量，如临界指数等．尺度小的结构若加以放大，将和原来的结构相似，所以也有人称这种无特征尺度却有“自相似结构”的现象为分形．这里的“相似”可以是严格的，但通常都是统计概率意义上的自相似，或称随机自相似．所以分形常和随机过程相联系．分形现象的研究方法和传统的研究方法有很大不同．

第二章　分数维的物理意义

物理学是定量描述自然界客观物体演化的科学. 为了描述物体运动,我们需要定义欧拉(Euler)维数作为物体运动的自由度数目.

图 2.1 是一只鸟(物体)在天空中的各种运动形态. 当鸟停在电线杆上不动时,它不能向任何位置移动,因此说它停在了 0 维空间. 当鸟在一根电线上向前或向后移动时,它有 1 个自由度,因而说它在 1 维空间运动. 在地面上移动的鸟则有 2 个自由度,因而它生活在 2 维空间. 在天空飞的鸟则有 3 个自由度,因而它生活在 3 维空间.

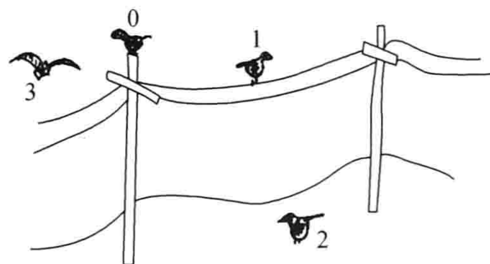


图 2.1　一只鸟所经历的 0,1,2,3 维空间

有时还要用更高维的空间. 为了确定月球的运动,我们需要用 3 个维数来描述它的位置,3 个维数来描述它的速度,因而就是 6 维空间.

从拓扑学讲,研究一个点、线、面、体,一只蚂蚁在它们上面爬行就分别具有 0,1,2,3 个自由度,因而称这些物体形状的拓扑维数分别为 0,1,2,3 维.

无论是欧拉维或拓扑维,它们都是整数维,描述的物体大多是人造的(如电线杆、球面等). 现在我们要描述自然界,如第一章中所讨论的物体和现象,怎么来描述它们呢? 为什么会出现分数维呢? 分数维的物理含义是什么?

§2.1　多尺度系统的标记

曼德布罗特在 *The Fractal Geometry of Nature* 中提出的第一个问题就是英国的海岸线有多长. 假如把英国改成中国,问中国的海岸线有多长,可能很多人早已从中学的地理教科书中知道,中国的大陆海岸线长度是 18000 km. 这似乎已成为常识,但我们仔细想一想,假如中国 13 亿人每人带一把尺子,约好上午 10 点从东北到海南同时分段地去测量中国的海岸线的长度,将 13 亿人测量的结果相加,恐怕比一百万千米还要长. 说中国的大陆海岸线长度为 18000 km,是航空测量的结果. 因为中国的海岸线有大大小小的弯曲,大的弯曲有数百千米(如渤海湾),小的弯曲只有几毫米. 从几毫米到数百千米,其尺度差 10^8 量级之多. 用空中摄影的办法去量海岸线,连数千米的弯曲都看不出来,若亲自到海边

去量，几毫米的弯曲也量得出来，所以量出的海岸线长度差别就很大了.

假如海岸线是图 2.2(a)那样长度为 1 的线段，那么用长度为 r 的尺子去量它，不管 r 的大小如何，量出来的长度总是 1，即

$$L=r^0=L_0=1.$$

实际的海岸线是有大大小小的弯曲的. 假如将图 2.2(a)的线段的中间 $\frac{1}{3}$ 向上弯曲，而形成长度为 $\frac{1}{3}$ 长的 4 段，似一个帐篷，然后再在上述 4 段中的中间向外弯，就形成每段长度为 $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 的 16 小段，以此类推就形成一种称为科赫曲线的海岸线.

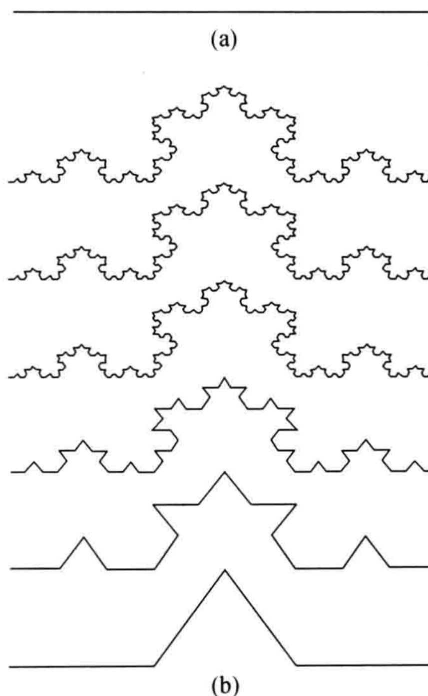


图 2.2
(a) 直线；(b) 科赫曲线状的海岸线

现在我们来寻找海岸线长度 L 和尺子长度 r 之间的关系. 我们设二者成如下形式关系：

$$L=r^\mu=N(r)r, \tag{2.1}$$

其中 $N(r)$ 是用尺子 r 去量海岸线所得到的段数. 由图 2.2 看出，用长度为 $r=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 的尺子去量，量出来的长度为 $L=\left(\frac{4}{3}\right)^n$. 将它代入(2.1)式，得到

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^\mu. \tag{2.2}$$

将(2.2)式两边取对数，得到

$$n(\ln 4-\ln 3)=\mu n(\ln 1-\ln 3), \tag{2.3}$$

故得到

$$\mu=1-\frac{\ln 4}{\ln 3}=1-D, \tag{2.4}$$

其中

$$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}\approx 1.2618 \tag{2.5}$$

是分数，称为分数维. 这样海岸线长度 L 和尺子 r 的关系为

$$L=r^{1-D}\approx r^{-0.2618}. \tag{2.6}$$

从(2.6)式看出，r 愈小，量出的海岸线长度愈大. 这说明中国大陆海岸线长度是 18000 km 的说法是不合适的. 在(2.6)式中 $D=1$ 时 $L=L_0=1$，它就是直线.

(2.6)式的 D 之所以称为分数维，我们只要将(2.1)式和(2.6)式比较就可看出原因. 图 2.2(a)是直线，它的欧拉维数 $D=1$，因而长度不随尺子 r 改变而

改变. 而图 2.2(b)的海岸线是含有大大小小不同尺度弯曲的"曲线",它的维数变成了 $D\approx1.2618$,这里 D 是分数,标记长度 L 如何随尺子 r 变化而变化.

从这里可以明显看出,分数维的引进是多尺度的系统(像海岸线)的标志. 第一章介绍了物理学中许多分形现象,它们都是跨越很宽尺度的多尺度系统. 因此,分数维最直接的物理意义是多尺度系统的特征.

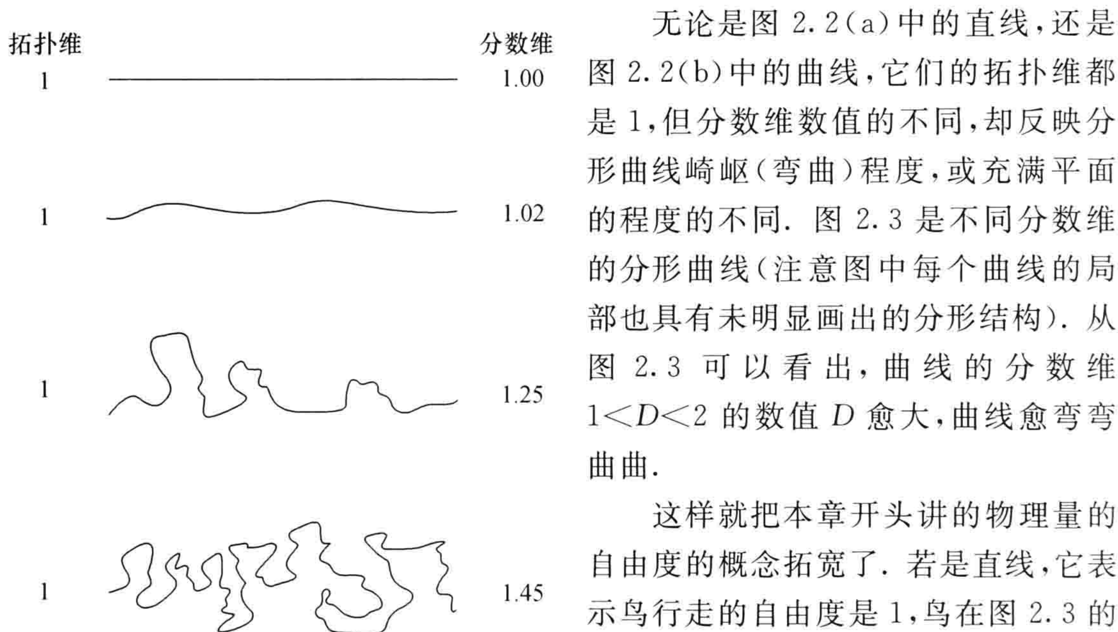


图 2.3　不同分数维的曲线

无论是图 2.2(a)中的直线,还是图 2.2(b)中的曲线,它们的拓扑维都是 1,但分数维数值的不同,却反映分形曲线崎岖(弯曲)程度,或充满平面的程度的不同. 图 2.3 是不同分数维的分形曲线(注意图中每个曲线的局部也具有未明显画出的分形结构). 从图 2.3 可以看出,曲线的分数维 $1<D<2$ 的数值 D 愈大,曲线愈弯弯曲曲.

这样就把本章开头讲的物理量的自由度的概念拓宽了. 若是直线,它表示鸟行走的自由度是 1,鸟在图 2.3 的崎岖的曲线上行走,它的自由度增加了,但是还没有达到在整个平面上自由行走的程度,故分数维大于拓扑维,而小于所占领的空间的维数,即

$$1<D<2. \tag{2.7}$$

对于分数维曲线也可以这样来理解:用一维测度(长度)去量它嫌太小,用二维测度(面积)去量它嫌太大,所以其维数只能介于 1 和 2 之间.

类似的,一个规整的曲面,它的拓扑维是 2,如图 2.4. 一只蚂蚁在上面行进可以向前、向后,也可以向左、向右,它有两个自由度. 但是假如现在有这样一个崎岖的曲面,它将立方体的每个面分成九等份,并将中间的一份挖掉,剩下的小立方体依法炮制,这样不断重复下去,就剩下只有皮没有肉的"曲面",蚂蚁不但可以左右、前后行走,而且还可以上下行走. 这样崎岖的"曲面"式的蚂蚁行走的自由度加大了,但是还不能在三维空间中无限制的爬行. 这种曲面称为谢尔平斯基海绵(Sierpinski sponge),见图 2.5.

由(2.1)式和(2.6)式比较可以看出,用 r 为尺子量出的分形对象的个数若为 N,则

$$N=\frac{1}{r^D}. \tag{2.8}$$

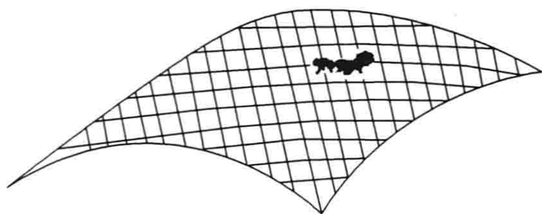


图 2.4 一个规整曲面有两个自由度

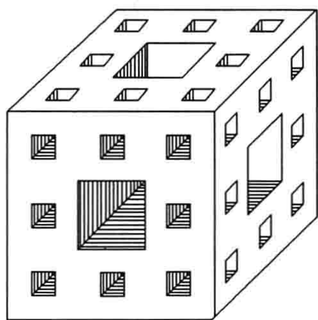


图 2.5 崎岖的谢尔平斯基海绵

(2.8)式就是常见的分数维 D 的定义，它表示用边长为 r 的小"立方体"量出的小立方体的个数是 $N(r)$. 图 2.6 是用 r 长度的小立方体去量一个混沌吸引子曲线的结果.

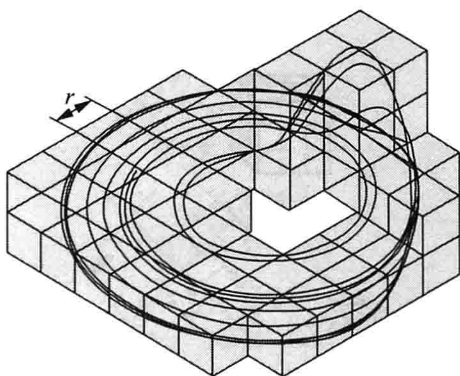


图 2.6 覆盖混沌吸引子的小立方体

以图 2.5 为例，它的左下角为边长$\frac{1}{3}$的小立方体，用它来量整个图 2.5 的对象，可以得到 $N=2\times8+4=20$ 个边长为$\frac{1}{3}$的小立方体. 故由(2.8)式，有

$$20=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^D}.$$

将上式两边取对数，得

$$D=\frac{\ln20}{\ln3}\approx2.7268.$$

所以蚂蚁在这样的曲面上爬行的自由度或分数维满足

$$2<D<3. \tag{2.9}$$

这说明一个 $D=2.4$ 的海绵将比 $D=2.3$ 的海绵占据更多的空间，并有比较大的表面积.

设想若在(2.4)式中 $D=1$，那么 $\mu=0$. 按(2.1)式，长度就不随尺度变化了. 同样，若在(2.8)式中 $D=3$，则用 $r=\frac{1}{3}$的尺寸去量单位立方体，量出的小立方体的个数按(2.8)式就是 27 个，而不是 20 个，那么这就是实在的固体立方体了. 这再一次说明，分数维是多尺度现象的标志，不能因为感到分数维数很新鲜，就随便使用. 对于物理学中的有特征尺度的问题不要用分数维，比如我们在物理学中常用的圆、直线、多边形和多面体等.

表 2.1 列出了线段、正方形、立方体和科赫雪花的维数，以便直观了解整数维和分数维的区别.

表 2.1 整数维和分数维的区别

几何体	单元	维数
线段	l_n	$n=3, N_n=3, l_n=\frac{1}{3}, d=-\frac{\ln 3}{\ln(1/3)}=1$
正方形	l_n^2	$n=3, N_n=9, l_n=\frac{1}{3}, d=-\frac{\ln 9}{\ln(1/3)}=2$
立方体	l_n^3	$n=3, N_n=27, l_n=\frac{1}{3}, d=-\frac{\ln 27}{\ln(1/3)}=3$
科赫雪花	$l_n^{d_f}$	$n=3, N_n=64, l_n=\left(\frac{1}{3}\right)^3, d_f=-\frac{\ln 64}{\ln(1/3)^3}\approx 1.26$

通常有两种方法计算分数维 D. 一种方法是从原有的几何形状开始，愈来愈挖空，就像谢尔平斯基海绵那样. 图 2.7(a)原是 1 个单位黑方块，分成 9 个相等的小方块后，挖去 4 个，剩下 5 个边长为$\frac{1}{3}$的黑方块. 这个过程不断下去，就形成分形图像. 因此用 $r=\frac{1}{3}$的小方块去量，得出个数 $N=5$. 故按(2.8)式，求出

$$D=\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{\ln 5}{\ln 3}=1.465\cdots.$$

另一种方法如图 2.7(b)所示，是一种生长的分形，原来只有一个“种子”，然后在它的 4 个角上长出 4 个同样的“种子”，形成一个 5 个“种子”的构形. 下一步再在这个构形上的 4 个角上又长出 4 个“5 个种子”的构形. 这样不断下去也形成分形. 设“种子”的最小尺寸是 r(例如 $r=1$)，那么用尺寸$\frac{L}{r}$倍的尺子去量图 2.7(b)的构形得出的个数，则有

$$N(L)=\left(\frac{L}{r}\right)^D=L^D. \tag{2.10}$$

因此分数维

$$D=\frac{\ln N}{\ln L}.$$

对于图 2.7(b),求出

$$D=\frac{\ln 5}{\ln 3}=1.465\cdots,$$

仍然和图 2.7(a)的维数"相同". 对于多尺度系统,不同尺度情况下的物理量往往具有"自相似性".

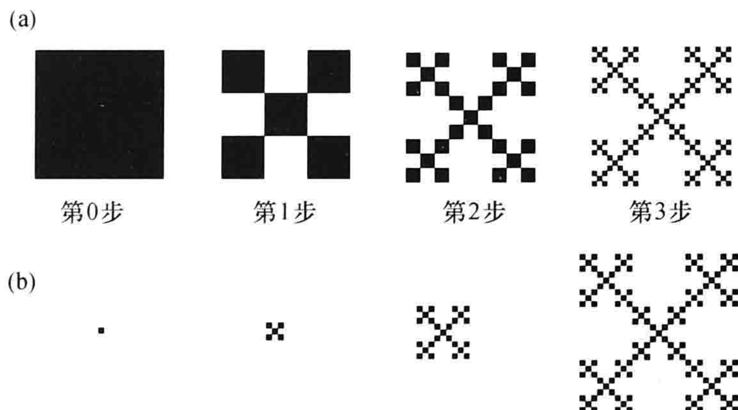


图 2.7 测量分数维的两种方法

(a) 挖空;(b) 生长

§2.2 临界现象和奇异性的特征

第一章介绍的连续相变和逾渗,按(1.4)式和(1.10)式在临界点上都会出现各种大大小小涨落的"集团",这当然是一种多尺度的现象,且在临界点处关联长度 ξ 趋向于无穷大,不管你用什么尺子去量它都是无穷大. 这里"无穷大"相当于在临界点处物理量发生了突变(如相变). 由于有大大小小的涨落,它们对发生相变都很重要,绝不能把小涨落忽略. 临界现象的出现正是各种尺度涨落关联的级联过程的结果,即具有"自相似结构".

将(1.4)式和(2.8)式对照,若把 $T-T_c$ 理解成(2.8)式中 N,而把 ξ 理解成(2.8)式中的 r,那么(1.4)式就可以改写成

$$T-T_c=\xi^{-\frac{1}{\nu}}, \tag{2.11}$$

因而相变现象的分数维 D 就是

$$D=\frac{1}{\nu}. \tag{2.12}$$

(2.12)式说明,相变现象中的分数维和相干长度 ξ 的临界指数互为倒数.

这里要特别指出，在临界现象中，$\xi \to \infty$，$T-T_c \to 0$ 也可以称为奇异性. 因为 $\xi \to \infty$，尺度 $T-T_c=0$，此时，零尺度不能被放大成有限的数，因此 $\xi \to \infty$ 的奇异性，也可理解成尺度不变性. 一个函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处发生突变，如阶跃函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}，在 x=0 处 \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\to\infty,$$

即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是奇异的，因而函数的尺度的量为 $r=\dfrac{f(x)}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}\to 0$，即尺度不变性.

这样，(1.4)式用分数维 D 来表示为

$$\xi(T)=(T-T_c)^{-\frac{1}{D}}. \tag{2.13}$$

正是因为临界点处的多尺度性质，所以临界指数 ν 和分数维 D 有关就不足为奇了.

从广义上讲，相变属于一种协作(cooperation)现象，在宏观层次上形成自相似结构. 这对研究地震、气象学、湍流都有很大意义.

逾渗也是一种相变，有人称其为“几何相变”. 为了计算逾渗的分形维数，我们令 $L=\dfrac{1}{r}$ 为逾渗集团的尺度，则(2.8)式就改为

$$N=L^D. \tag{2.14}$$

对于一个尺度为 L 的方块，黑球所占据的概率 P 为

$$P=\frac{N(L)}{L^d}, \tag{2.15}$$

其中 $N(L)$ 为体积 L^d 内黑球所占格点总数. 若尺度为 L 的逾渗集团为分形，则将(2.14)式代入到(2.15)式，得到

$$P=\frac{L^D}{L^d}=L^{D-d}, \tag{2.16}$$

其中 D 就是逾渗集团的分形维数.

图 2.8(a)是 $L=8$ 的一个逾渗方块，其中黑方块占有 27 块，那么占据概率为($d=2$)

$$P=\frac{27}{8^2}\approx 0.42.$$

由(2.16)式，求得

$$8^{D-2}\approx 0.42,$$

有

$$D-2\approx\frac{\ln 0.42}{\ln 8}\approx -0.41,$$

故

$$D\approx 2-0.41=1.59.$$

图 2.8(b)是整个的逾渗集团. 由(2.16)式看出,在双对数($\ln L,\ln P$)的坐标纸上,其图像是斜率 $D-d$ 的直线. 见图 2.8(c).



图 2.8　逾渗集团的分形

(a) $L=8$ 的方块;(b) 整个逾渗集团;(c) 直线斜率为 $D-d$

从本节讨论可以看出,分数维是相变和临界现象的特征.

§2.3　间歇(间隙)性的表现

无论是相变、逾渗还是海岸线,分形现象的特点就是它不会充满它所占据的空间. 图 2.2 的科赫曲线不管如何弯曲,它不会占领二维平面空间,见(2.7)式. 图 2.5 的谢尔平斯基海绵,不管它的表面如何崎岖不平,它也不会充满三维空间,见(2.9)式. §1.2 介绍的大涡变小涡的级联过程,也说明涡旋是不充满空间的. 图 1.3 中面积 S 和涡旋尺度 r 的关系(1.7)式为

$$S=r^{\mu}=r^{2-\frac{\ln 3}{\ln 2}}=r^{2-D}, \tag{2.17}$$

其中

$$D=\frac{\ln 3}{\ln 2}\approx 1.5849 \tag{2.18}$$

就是图 1.3 大涡变小涡的分形现象的分数维.

若令 $\frac{1}{r}=l$,则(2.17)式变成

$$S=\left(\frac{1}{r}\right)^{D-2}=l^{D-2}, \tag{2.19}$$

其中 r 是小涡旋的尺寸,而 l 是球的半径. (2.19)式表示在 l 球内湍流涡旋所占的比例或概率,它说明随着 r 的减小或 l 的加大,小涡旋所占的面积(或概率)会变小. 若 $D=2$,由(2.17)式,有 $S=1$,涡旋就充满空间了. 现在 $D\approx 1.5849<2$,说明涡旋不充满空间. 这就是所谓的间隙性.

现在举一个涡旋并不充满三维空间的例子. 设想面积 $S=1$ 的一个二维涡度面(见图 2.9),由于不稳定,它总会不断地分成许多小涡片. 我们设想将原来方的涡片分成相等的 9 片,每片是边长为$\frac{1}{3}$的小方块. 在这 9 小块中,去了 4 个角和中间一块,4 个角向上长出边长为$\frac{1}{3}$的小立方块,中间向下长出一个边长为$\frac{1}{3}$的小立方块. 这 5 个小立方块,每块有 5 个面共有 $5\times5=25$ 个面,加上原来还剩下 4 个面. 这样由 1 块边长为 1 的正方形涡片,逐步变成多个小涡片. 这种过程不断重复下去,小涡片越来越多,涡片的面积越来越大. 我们设涡块面积 A 和小方块面积 a 之间的关系为

$$A=a^{\mu}, \tag{2.20}$$

那么

$$\left[29\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{n}=\left[\left(\frac{1}{3^{2}}\right)^{n}\right]^{\mu}.$$

两边取对数,得到

$$\mu=1-\frac{\ln29}{\ln9}\approx-0.54\approx2-D, \tag{2.21}$$

其中

$$D=1+\frac{\ln29}{\ln9}\approx2.54 \tag{2.22}$$

就是图 2.9 构造出的二维间歇湍流的分数维. 由(2.20)式,得

$$A=a^{2-D}. \tag{2.23}$$

由(2.23)式看出,若 $D=2$,$\mu=0$,则 $A=1$,涡片面积不随小方块面积 a 变化而变化. 现在 $2<D<3$,$\mu<0$,那么涡片面积 A 就随小方块面积 a 减小而增加.

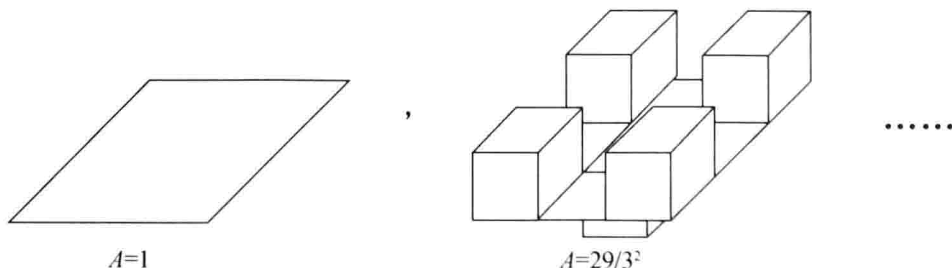


图 2.9 间隙湍流的分数维

物理现象中不但有空间上的间隙性,而且还有时间上的间歇性. 从字面上讲,它表示一段时间有,另一段时间没有. 拿降水量来说,一年 365 天中很多天无降水(好像歇着),有些天有好多降水(好像不歇着). 像降水量这样的间歇性在很

多自然现象中均有体现. 自然系统中有大大大小小的涨落,小地震天天都有,全球 8 级以上的地震一年中就只有几次. 图 2.10 是观测到的一段时间序列. 从图 2.10 看出,时间轴上有三段近似周期信号,中间突然穿插着三小段非周期信号,这就是时间上的间歇性.

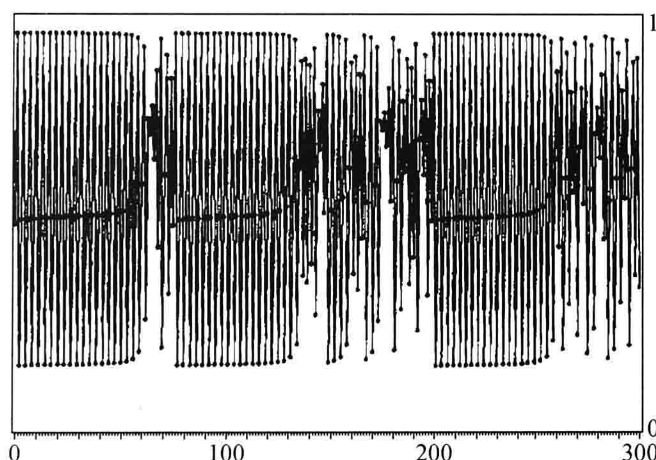


图 2.10 物理量的时间序列

分形现象的间歇性是有其深刻的物理本质的. 树木不能生长成一块大木柱,因为要留间隙,充分吸收阳光,通过光合作用吸收 CO_2,放出 O_2 气. 雪花之所以形成枝状,因为水汽冻结时要释放潜热,要有足够大的空间输送潜热. 在相变点处,磁矩间的相互作用逐步压倒了随机的热运动而占上风,形成有新相特征的集团或“花斑”. 若无空隙而只有一个大集团,这种相关反而减弱了,见图 1.7 $p>p_c$ 情况. 只有大的集团,地表水也就不能向下渗透了. 天天都发生大地震,能量释放完了也不会积累了. 天天都下雨,水汽凝结完了,自然界水分循环就破坏了.

间隙性或间歇性在自然界是普遍存在的.

§2.4 级联过程和自我复制

正是因为分形中有大大小小的不同尺度,一般来讲尺度大的客体总带有较大的能量,这种大的能量就要逐步向尺度小的输送. 这种一级一级传输(输送)的过程就是级联过程. 图 1.3 就显示了这种大涡变小涡的级联过程. 从物理上讲,夏天地面被太阳晒得很热,因而容易形成大的热对流涡旋,但空气有黏性,在向上速度和向下速度造成的剪切下,容易将大涡旋撕裂成小涡旋,小涡旋再撕裂成更小的涡旋,这就会形成有大大小小涡旋的湍流.

我们再举一个分形中常引用的康托尔(Cantor)集合的例子. 最初第一级只有一个长度为 1 的大尺度线段. 之后,将这个线段分成三等分,再去掉中间的一段,这就形成有两段长$\frac{1}{3}$的线段的第二级. 第三级是将第二级剩下的两小段也各自分成三等分,也都去掉其中的中间一段. 这个过程无限进行下去,剩下的点集就是康托尔集合,见图 2.11. 因此,用 $r=\frac{1}{3}$ 尺子去量康托尔集合,量得两段 $N=2$,用$r=\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 的尺子去量,量得四段 $N=4$,以此类推,用 $r=\left(\frac{1}{3}\right)^n$,量得段数是 2^n. 按(2.8)式,求得康托尔集合的分数维是

$$D=\frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}=\frac{\ln 2^n}{\ln 3^n}=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0.6309. \tag{2.24}$$

这种级联过程的维数也是分数维.

图 2.11 是一维级联过程,图 1.3 是二维级联过程,下面举个三维级联过程,见图 2.12. 设想原先第一级三维涡旋的尺寸是 l_0,第二级涡旋的尺寸是 rl_0,其中 $0<r<1$,第 n 级涡旋的尺寸 l 是 $r^n l_0$,那么级联过程中,第二级涡旋的体积只

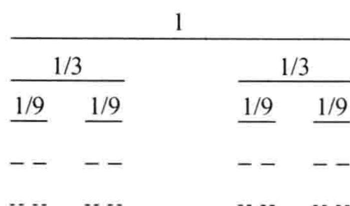


图 2.11 康托尔集合

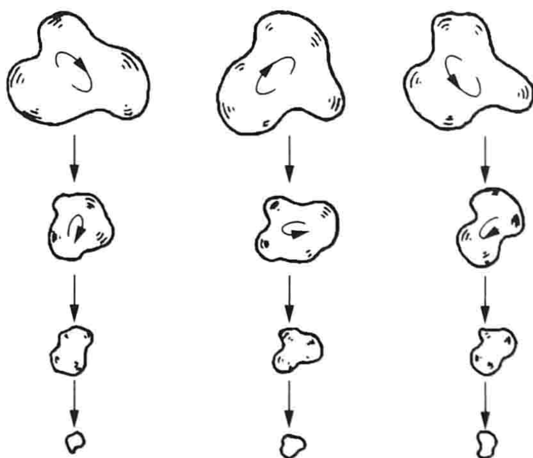


图 2.12 三维涡旋级联的 β 模型

是第一级涡旋的 β 倍($0<\beta<1$),而随着级数 n 的增加,涡旋所占的体积愈来愈小. 设第 n 级所占体积与原体积的比例为

$$P=\beta^n=\left(\frac{l}{l_0}\right)^{3-D}, \tag{2.25}$$

若 $D=3$,由(2.25)式 $P=1$,这就意味着小涡旋充满空间. 因为

$$\left(\frac{l}{l_0}\right)=r^n, \tag{2.26}$$

将(2.25)两边取对数,得

$$n\ln\beta=(3-D)\ln\left(\frac{l}{l_0}\right).$$

将(2.26)代入上式,得

$$n\ln\beta=(3-D)n\ln r,$$

因而可求得

$$3-D=\frac{\ln\beta}{\ln r},$$

或

$$D=3-\frac{\ln\beta}{\ln r}. \tag{2.27}$$

图 2.12 的湍流级联模式称为 β 模式,(2.27)式的 D 称为湍流 β 级联模式的分数维. 若取 $\beta=0.6, r=0.5$,由(2.27)式,求得

$$D=3-\frac{\ln 0.6}{\ln 0.5}\approx 3-0.737=2.263. \tag{2.28}$$

由于图 2.12 由第一级到第二级的过程和第二级到第三级的过程完全适用同样的规则(或公式),所以多尺度系统的级联过程也可以看成是自我复制或用同一公式的迭代过程. 后面第四章将谈到相变的"重正化群变换",实际上就是一种迭代过程. 生物学中 DNA(脱氧核糖核酸)的自我复制、细胞的复制、树木的生长等均是一种不断重复的迭代过程. 这种级联或迭代过程只有在多尺度系统的研究中才会用到. 如果用单一尺度的研究方法,只能列出物理量之间的一个关系式(公式)而已.

图 2.11 的康托尔集合和下列的迭代递推系统

$$x_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{3}x_n=w_1(x_n),\\ \frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}=w_2(x_n),\end{cases} \tag{2.29}$$

$n=0,1,2,\cdots$相联系.

康托尔集合的第一级是间隔 $[0,1]$ 上的一条线段. 将$[0,1]$间隔代入(2.29)式的右端 w_1,那么左边就得到间隔 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$. 将$[0,1]$ 间隔代入(2.29)式右端 w_2,那么左端就得到间隔$\left[\frac{2}{3},1\right]$. 间隔$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和间隔$\left[\frac{2}{3},1\right]$就是康托尔集合的第二级,也可以看成是第一级所生出的两个儿子. 我们假设间隔$\left[0,\frac{1}{3}\right]$是大儿子,$\left[\frac{2}{3},1\right]$是小儿子.

应当指出,迭代系统(2.29)式不同于通常的迭代系统 $x_{n+1}=f(x_n)$,后者 x_{n+1} 仅决定于输入 x_n,因而可以称为无记忆的系统. 但是系统(2.29)却不同,究竟使用 w_1 还是 w_2 是由输出 x_{n+1} 来决定,因而带有记忆性.

第二级仍按同样的规则(2.29)到第三级. 将大儿子 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 代入(2.29)式右端的 w_1 和 w_2,左边得到间隔 $\left[0,\frac{1}{9}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$;将小儿子 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 代入(2.29)式右端的 w_1 和 w_2,左边就得到间隔 $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{8}{9},1\right]$. 见图 2.13. 第三级可以看做是第一级的四个孙子. 从图 2.13 看出,所有经过 w_1 迭代出来的全部在康托尔集合的左边,经过 w_2 迭代出来的全部在右边,而且四个孙子中从左边数,第一、三个孙子是大儿子的,第二、四个孙子是小儿子的. 再将第三级的四个间隔代入到(2.29)式得右边,左边就得到第一级的八个重孙子. 这种迭代过程可以一直重复下去.

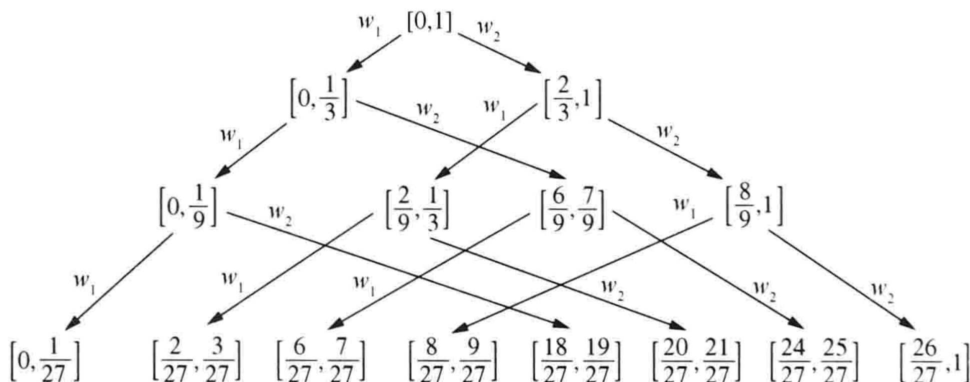


图 2.13 康托尔集合迭代过程的宝塔图

§ 2.5 分形层次结构

初看多尺度的分形似乎很杂乱无章,但是由于分形过程的自相似性,或自我复制性,它会产生很漂亮的分形层次结构.

将一维迭代递推系统(2.29)推广到二维,写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

也可以写成

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n + by_n + e = w_1(x_n, y_n), \\
y_{n+1} &= cx_n + dy_n + f = w_2(x_n, y_n),
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

若平面上的初始图像(x_0, y_0)按(2.31)式的 w_1 和 w_2 自我复制成小的拷贝，小拷贝再通过(2.31)式得到更小拷贝，不断下去，那么并集

$$
w_1 \cup w_2 \tag{2.32}
$$

就产生了分形结构. 若(2.30)式中右端项中的$|a|<1$，$|d|<1$，则代表拷贝的缩小，正像(2.29)式中的$\frac{1}{3}$代表$[0,1]$ 区间被收缩一样.

若(2.30)式中的右端矩阵可以写成

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1\cos\theta_1 & -r_2\sin\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 & r_2\cos\theta_2 \end{pmatrix}, \tag{2.33}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{a^2+c^2}, \quad \theta_1 = \cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}, \\
r_2 &= \sqrt{b^2+d^2}, \quad \theta_2 = \cos^{-1}\frac{b}{\sqrt{b^2+d^2}}.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

(2.33)式中的 $r_1<1$，$r_2<1$ 分别表示在 x 和 y 方向的缩小倍数，θ_1 和 θ_2 分别表示拷贝顺时针旋转的角度. (2.30)式中的 e 和 f 的作用是将坐标原点平移到(e,f).

分形结构的分数维，按(2.8)式主要取决于收缩比 r 和量出的个数 N.

下面举几个分形层次结构的例子. 图 2.14 是第一个例子：以长度为 1 的一个垂直树干为第一级. 然后，从树干顶端分别向左和向右$\left(\theta_1=\frac{\pi}{2}, \theta_2=-\frac{\pi}{2}\right)$做出长度为 0.6 的两个树枝，这是第二级. 第三级再在两个树枝的末端向上和向下伸展出长度为$(0.6)^2$ 的两个小树枝. 这种过程不断进行下去，就形成了图 2.14 所示的分形树的结构.

因为用 $r=0.6$ 的尺子去量第二级，得到 $N=2$，故按(2.8)式，有

$$
2=\left(\frac{1}{0.6}\right)^D.
$$

由此求的分数维

$$
D=\frac{\ln 2}{-\ln 0.6}\approx 1.357. \tag{2.35}
$$

这里 $D\approx 1.357$，它反映这种树结构未充满二维空间的程度.

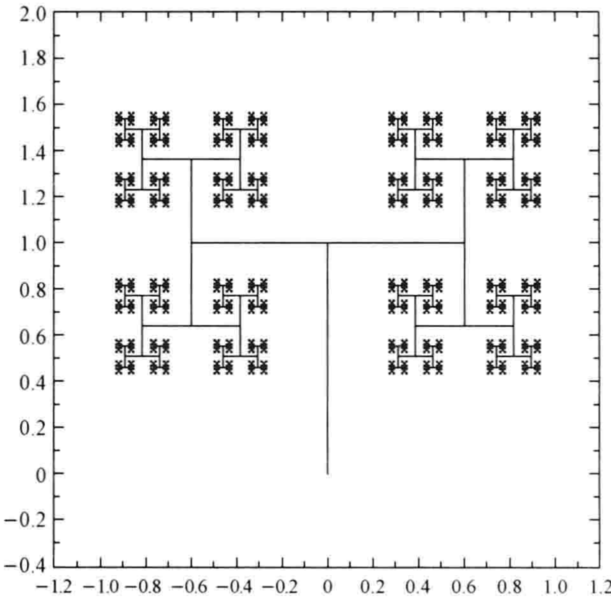


图 2.14　维数为 1.357 的分形树

图 2.15 是第二个例子，它将图 2.14 的树 $r_1=r_2=0.6$ 改变成 $r_1=0.7$，$r_2=0.65$，且 $\theta_1=40°$，$\theta_2=-60°$. 注意，现在以 r 为尺子去量，量出来的段数分别为 N_1 和 N_2，则总段数为

$$N(r)=N_1(r)+N_2(r), \tag{2.36}$$

但每个小段却是和一个大段是自相似的，因此用 0.7 的 r(即 r_1)去量左段和用 0.5 的 r(即 r_2)去量右段，都应该和用 r 去量大段是一样的，即

$$N_1(r_1r)=N_2(r_2\,r)=N(r)=r^{-D}, \tag{2.37}$$

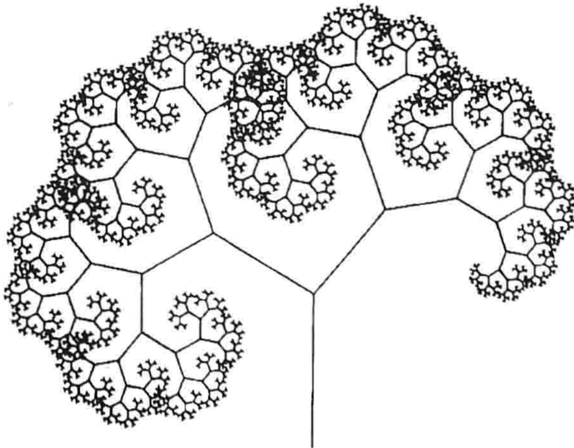


图 2.15　分数维 1.774 的分形树

但

$$N_1(r)=\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-D}, \quad N_2(r)=\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-D}. \tag{2.38}$$

将(2.37)和(2.38)式代入(2.36)式，得到

$$r^{-D}=\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-D}+\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-D},$$

即

$$r_1^D+r_2^D=1. \tag{2.39}$$

(2.39)式是两种不同缩小尺子所量出的分数维的求法. 公式(2.39)还要在第七章中讨论. 现在将 $r_1=0.7$，$r_2=0.65$ 代入(2.39)式，得到

$$0.7^D+(0.65)^D=1 .$$

由上式算出分数维

$$D\approx 1.774.$$

显然，由于图 2.15 的分数维比图 2.14 的分数维要大，所以图 2.15 比图 2.14 更充满空间.

由(2.35)式看出，如果分形树的缩小比例达到 $r=0.707$，那么分形树的维数达到 2，此时分形树几乎要充满整个平面. 相反地，若 $r<0.5$，那么分形树的维数将小于 1，此时树叶就是点集合了.

图 2.16 是第三个例子，它是取 $r_1=0.75$，$r_2=0.55$ 且 $\theta_1=-30°$，$\theta_2=-10°$. 利用(2.39)式求得

$$D\approx 1.637. \tag{2.40}$$

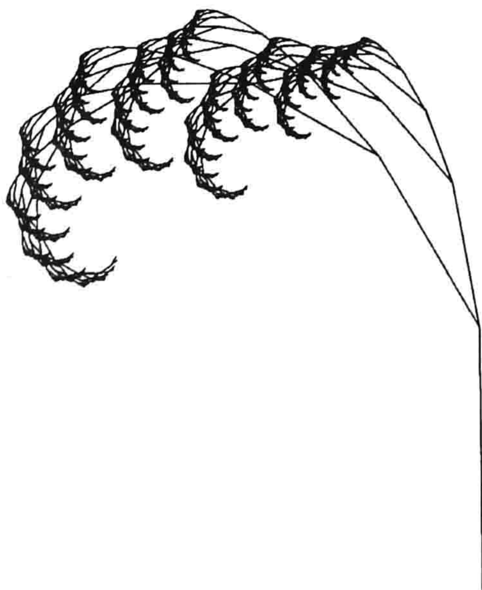


图 2.16 分数维是 1.637 的分形树

分形树还有一个特点，就是树叶由下往上生长时，每个树叶是从第一级树叶逆时针旋转 0.618×180°=111.24°生长的，其中 0.618 是黄金分割数 1.618 的倒数. 若树叶生长的次序按 1,2,3,… 排序，那么叶尖就形成向内的螺旋结构，见图 2.17.

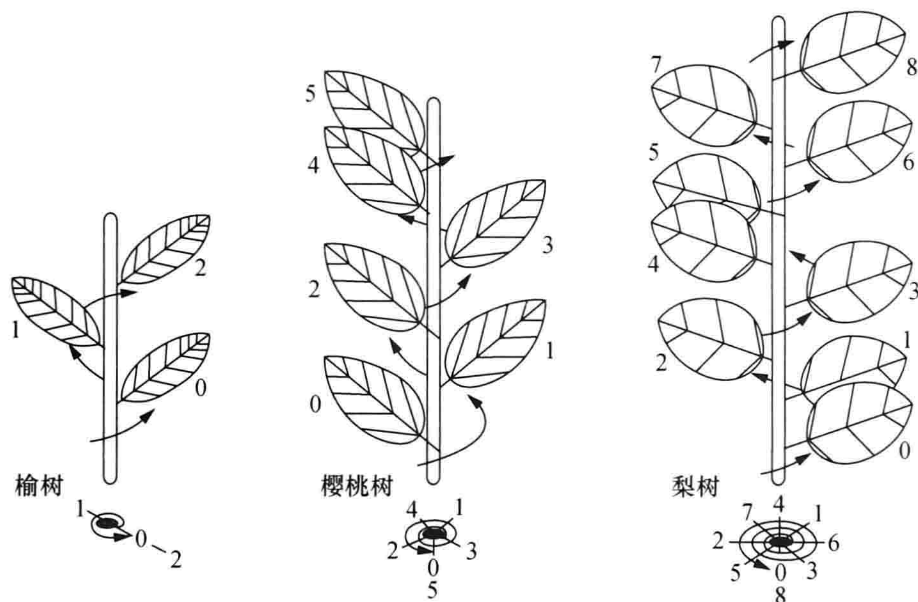


图 2.17　树叶生长的螺旋结构

最后一个例子是图 2.18 的谢尔平斯基海绵. 这种分形结构所对应的迭代函数系统是

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
w_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
w_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

从(2.39)式我们可以归纳出，若迭代函数系统 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 的收缩因子分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，那么该系统的分数维 D 满足

$$
r_1{}^D + r_2{}^D + \cdots + r_n{}^D = 1. \tag{2.42}
$$

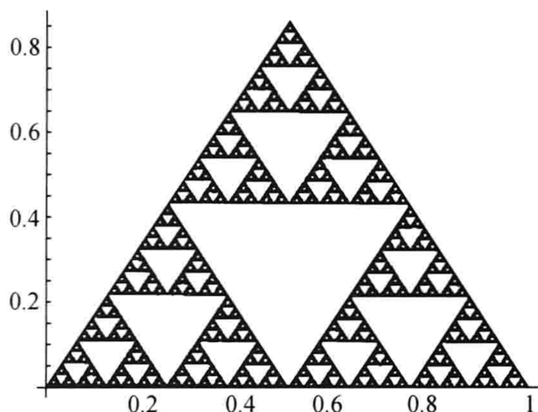


图 2.18 谢尔平斯基海绵

对图 2.18 的谢尔平斯基海绵，有 $r_1=\frac{1}{2}, r_2=\frac{1}{2}, r_3=\frac{1}{2}$，所以按(2.44)式，得

$$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^D=1,$$

故求得

$$D=\frac{\ln 3}{\ln 2}\approx 1.585,$$

因此分数维呈现出层次结构.

§ 2.6 处处不可微

物理学中通常认为物理量(如速度、加速度和力)是处处连续可微的，因而物理现象的演化方程均可由整数阶的微分方程来描述. 但是，1926 年气象学家里查孙(Richardson)发现，湍流的速度场是连续但不可微的. 如第一章和第二章所讨论的分形现象都具有连续但不可微的性质，此时分数维和分数阶微积分是最主要的工具. 里查孙当时建议用魏尔斯特拉斯(Weierstrass)函数(简称魏氏函数)来描述大气风场.

通常魏尔斯特拉斯函数可写为

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^n}[1-\cos(b^n t)]=\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^n}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}b^n t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}\right\}, \quad (2.43)$$

其中 φ_n 是随机相位. 图 2.19 是取 $a=4, b=8$ 的 $w(t)$ 随时间 t 的变化图，$0\leqslant t\leqslant 0.5$. 从图 2.19 看出，这个函数的确是处处连续而不可微的.

从物理上讲，魏尔斯特拉斯函数(2.43)可以理解成各种小振幅($a>1$)高频($b>1$)振荡的叠加. 在(2.43)式中，$n=0$ 代表单位频率和单位振幅的振荡，

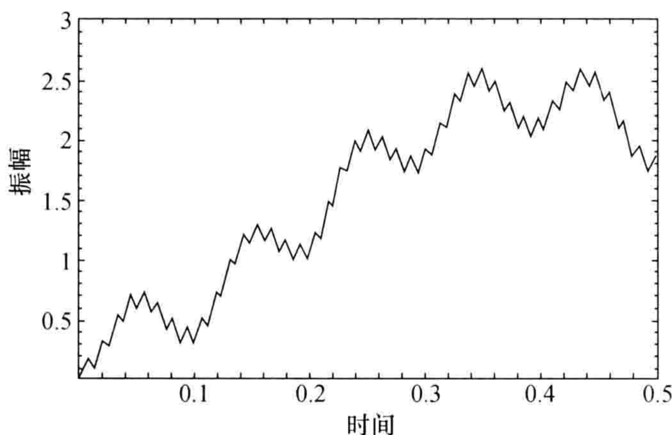


图 2.19 魏尔斯特拉斯函数($a=4,b=8$)

$n=1$ 代表第二周期项,频率是 b,振幅是$\frac{1}{a}$,$n=2$ 代表第三周期项,频率是 b^2,振幅是$\frac{1}{a^2}$,以此类推,第 n 项频率是 b^n,振幅是$\frac{1}{a^n}$. 因此,若把频率 b^n 看成是尺度 r,把振幅 A 和频率的关系设为

$$A=r^{\mu}, \tag{2.44}$$

那么

$$\left(\frac{1}{a^n}\right)=(b^n)^{\mu}. \tag{2.45}$$

由(2.45)式,求得

$$\mu=\frac{\ln a}{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}=D-2. \tag{2.46}$$

将 μ 设成 $D-2$,其中 D 是魏氏函数的分维数. 若 $D=2$,则 $\mu=0$,那么振幅 A 就不随 r 变化. 由(2.46)式,得 $a=b^{2-D}$,将它代入(2.43)式,得

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos(b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \tag{2.47}$$

魏氏函数(2.47)遵从如下的标度律:

$$\begin{aligned}w(bt)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^n}[1-\cos(b^{n+1}t)]\\&=a\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^{n+1}}[1-\cos(b^{n+1}t)]\\&=aw(t)\\&=b^{2-D}w(t).\end{aligned} \tag{2.48}$$

在(2.46)式中取 $a=4,b=8$,可求得

$$\mu=2-D=\frac{\ln a}{\ln b}=H$$

或

$$D = 2 - \frac{\ln 4}{\ln 8} = 2 - H \approx 1.33, \tag{2.49}$$

其中

$$H = \frac{\ln 4}{\ln 8} \approx 0.67 \tag{2.50}$$

称为标度指数，表示振幅尺度和频率尺度之比．因此图 2.19 的魏氏函数曲线的维数是 1.33.

自相似关系(2.48)就如同§1.1 所介绍的重正化群的标度关系(1.3). (2.48)式说明尺度(频率)放大 b 倍，振幅则放大 a 倍.

图 2.20(a)与图 2.19 相同，而图 2.20(b)是时间尺度放大 8 倍的图．从图 2.20 看出，时间尺度放大 8 倍后，和原来未放大的图是自相似的.

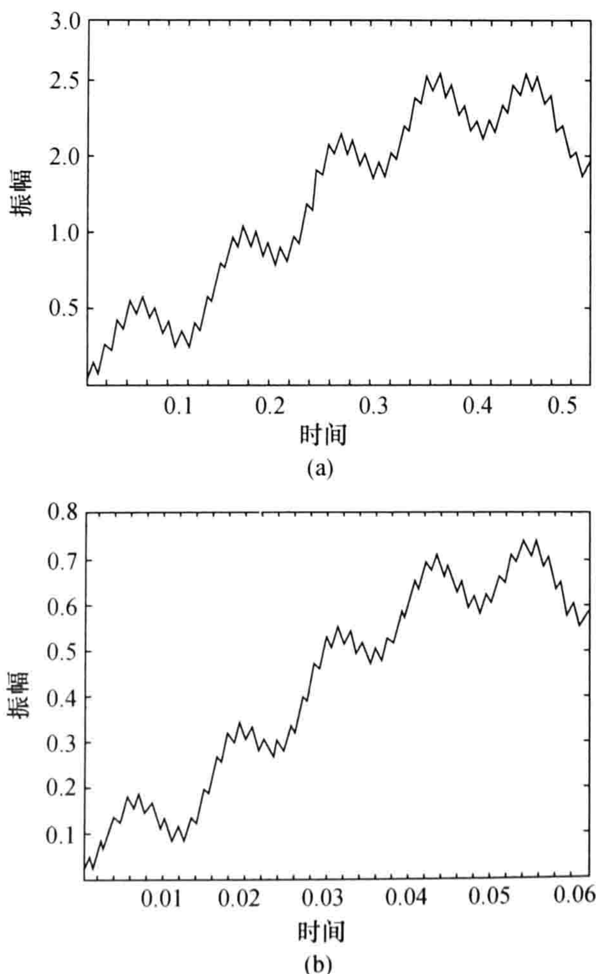


图 2.20 魏氏函数的自相似关系

(a) 同图 2.20；(b) 将(a)的时间尺度放大 8 倍

现在求标度关系(2.48)的解. 设解为

$$w(t)=A(t)t^{H}, \tag{2.51}$$

将(2.51)式代入(2.48)式,得

$$A(bt)b^{H}t^{H}=aA(t)t^{H},$$

由此可求得

$$A(bt)=A(t),$$

$$b^{H}=a. \tag{2.52}$$

(2.52)式的第一式说明,若以 $\ln t$ 做时间坐标,就有

$$A(\ln b+\ln t)=A(\ln t). \tag{2.53}$$

(2.53)式说明 A 是周期函数,周期为 $\ln b$.

(2.51)式和(2.52)式说明,整个魏氏函数以 t^{H} 幂律形式增长,见图 2.21 中的粗实线.

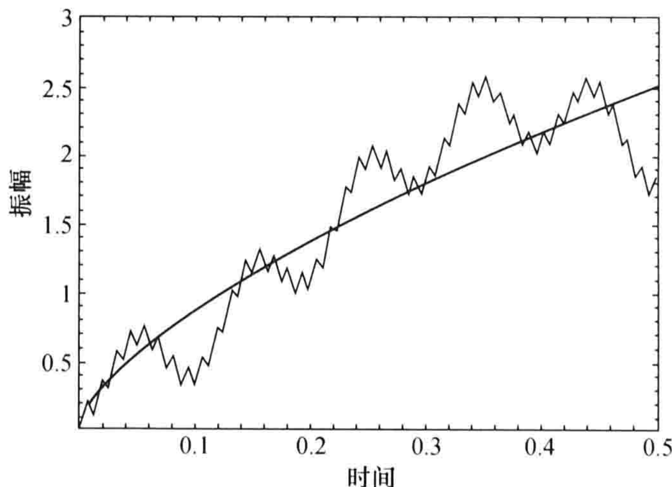


图 2.21　在魏氏函数的大小涨落中叠加上一个幂函数的增长

跨尺度的随机魏氏函数是描述随机分形过程的重要函数.

§2.7　记 忆 性

分形最不引人注目的一个特征是它的记忆性,这种记忆性通常是难以理解的,但是有记忆力的人脑和分形一样有极其复杂的层次结构,这一点很相似. 人脑由大量神经元组成,每个神经元又通过称为树突的精细结构收集来自其他神经元的信息,通过称为轴突的一条长而细的结构发出电脉冲,而轴突又像分形树一样分裂成数千条分支,在每条分支的末端称为突触的结构能把来自轴突的电话性脉冲变为电作用,从而抑制或兴奋相连的各神经元中的活性. 当一个神经

元收到兴奋输入，而兴奋输入又比抑制输入大时，神经元把电话性脉冲向下传到它的轴突，改变轴突的有效性，从而使一个神经元对另一个神经元产生影响. 影响改变，便发生学习行为，表现出记忆功能.

§ 2.4 的自我复制过程产生的层次结构，尽管子孙满堂，仍然非常清楚地记得谁是他的孙子、重孙子……这种自我复制过程，输出不仅仅决定于它的输入，而且究竟是用 w_1 去复制还是 w_2 去复制，还得看输出的结果. 因此$(n+1)$时刻的值，不仅由 n 时刻的值决定，还要由 n 时刻之前时刻$(n-1)$，$(n-2)$等的值决定，这就有了记忆性.

§ 1.8 中的正常扩散和异常扩散的最大区别是：对正常扩散，自相关函数

$$R(\tau)=\langle x(t+\tau)-\langle x\rangle\rangle\langle x(t)-\langle x\rangle\rangle=\langle x^2\rangle \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T}} \tag{2.54}$$

是指数函数，而异常扩散的自相关函数 $R(\tau)$是幂函数

$$R(\tau)\propto\tau^{-\gamma}. \tag{2.55}$$

详见第五章.

对于指数函数(2.54)式，若时间 τ 到达特征时间 T 以后，相关函数已衰减了 $\frac{1}{\mathrm{e}}\approx\frac{1}{2.7}$，但是幂函数(2.55)式却衰减得慢多了. 为了便于比较，我们将指数函数(2.54)式和幂函数(2.55)式绘在图 2.22 中. 从图 2.22 明显看出，幂函数的自相关函数衰减比较慢，有较好的记忆性.

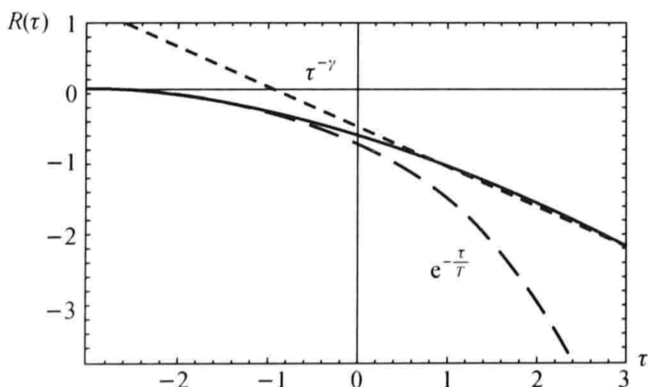


图 2.22 指数相关(2.54)式(长虚线)和幂相关(短虚线)的区别

指数函数和幂函数的差别还表现在微分方程上. 线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x \tag{2.56}$$

的解是指数函数

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-t}, \tag{2.57}$$

而非线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ax^2 \quad (a>0) \tag{2.58}$$

的解为

$$x(t)=\frac{1}{\frac{1}{x_0}+at}, \tag{2.59}$$

(2.57),(2.59)式中的 x_0 是 $t=0$ 时刻的初始值.(2.59)式当 t 足够大时变成

$$x(t)\approx\frac{1}{a}t^{-1}, \tag{2.60}$$

是衰减较慢的幂函数.

指数函数和幂函数的差别说明,分形所描述的现象是非线性的,且有较好的记忆性.

在第十一章我们将看到分形和分数阶($0<\alpha<1$)导数的关系.若

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}=0, \tag{2.61}$$

方程(2.61)的解是

$$x(t)=ct^{\alpha-1}, \tag{2.62}$$

又是一个幂函数.该系统也有较好的记忆性.

近代物理学家在处理某些问题时会使用非定域(空间和时间)的场论.从时间角度讲,它主要描述给定物理系统是否具有记忆的能力.为了说明,我们举一个经典粒子在稀释气体中运动的例子,见图 2.23.图 2.23(a)是无边界的,图(b)有边界.在无边界的情况,粒子的碰撞率 $\psi(t)$ 由 τ 时刻前的源项 $\psi(t-\tau)$ 决定,这是定域理论.在有边界的情况下,$(t-\tau)$时刻的气体粒子在运动过程中被散射,那么在时刻$\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$它们碰撞到边界会反射,因此在时刻 t 的动力学不仅有源项 $\psi(t)$,而且还附加有正比于 $\psi(t-\tau)$ 的非定域项,即 $\psi(t)+\rho\psi(t-\tau)$.由于延迟作用,这就产生了记忆性影响.在复杂的反射系统中,空间中的每一点都是新波面的源.

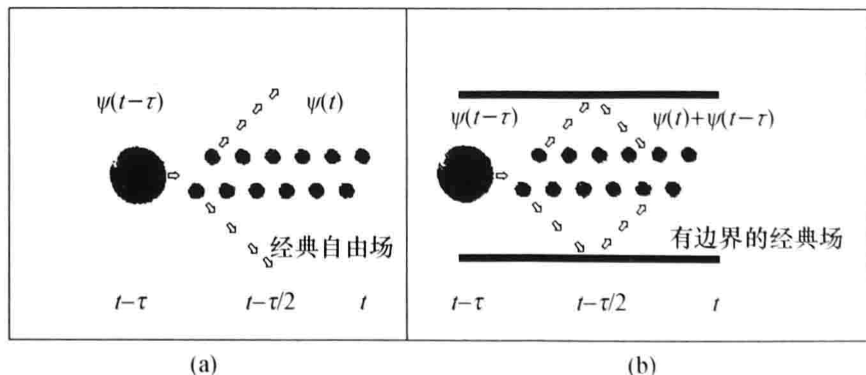


图 2.23 记忆性影响的几何解释

小　结

多尺度的物理学中的分形,不能只简单地理解为维数是分数,它反映出物理现象的多尺度性、临界性、奇异性、间歇性、不可微性等等特征.

特别应当指出的是,由于自我复制而产生的分形层次结构使分形具有长程相关性和记忆性.

第三章　标(尺)度变换和迭代函数方程

分形现象最重要的特征是无特征尺度，也就是说尺度跨越好多个量级，那么我们就要问，标(尺)度变换(放大或缩小)会有什么后果？物理量随尺度变化而变化，什么量不随尺度变化而变化？过去在物理学中我们接触过平移变换、反射变换和旋转变换，现在分形现象中却是标度变换. 分形对很多物理学者来说是比较陌生的，我们希望本章的介绍能够开拓读者的眼界.

§3.1　标度变换

先谈谈比较熟悉的例子：阿基米德螺旋和对数螺旋. 若用极坐标(r,θ)表示，二者分别为

$$r(\theta)=a\theta \tag{3.1}$$

和

$$r(\theta)=\mathrm{e}^{a\theta}, \tag{3.2}$$

见图 3.1 和图 3.2. 请注意，r 是离坐标原点的距离，θ 是自正 x 轴逆时针旋转的角度.

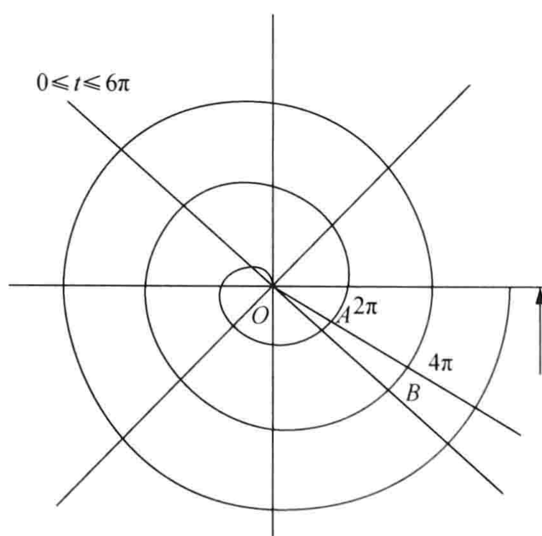


图 3.1　阿基米德螺旋

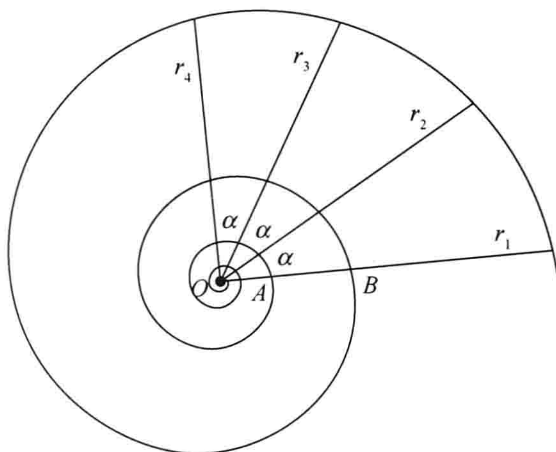


图 3.2 对数螺旋

现在我们对(3.1)式做一个标度变换，将 r 变成 λr($\lambda>1$ 是放大，$\lambda<1$ 是收缩)，看有什么结果.(3.1)式两边乘上 λ，得

$$\lambda r(\theta)=a\cdot\lambda\theta=ar(\lambda\theta). \tag{3.3}$$

(3.3)式左边表示将原有整个图形放大或缩小 λ 倍，右边表示角度为 $\lambda\theta$ 阿基米德螺旋(3.1)式，也就是说整个图形放大或缩小 λ 倍，只要将 θ 转成 $\lambda\theta$，那么就和原来的曲线重合. 具体地讨论一下. 考虑在图 3.1 中，原角度在 2π 时阿基米德螺线上的一点 A，将其再逆时针转 2π，即 θ 由 2π 变成 4π，θ 放大 $\lambda=2$ 倍，则其对应的向径上的点为 B. 因为按(3.1)式，$OA=a\cdot 2\pi$，$OB=a\cdot 4\pi$，$OB-OA=AB=(a\cdot 2\pi)=OA$，$AB$ 之间的距离和原点 O 到 A 点之间的距离相等. 这就得出了前面的结论.

在对数螺旋(3.2)式两边取对数，得

$$\ln r(\theta)=a\theta. \tag{3.4}$$

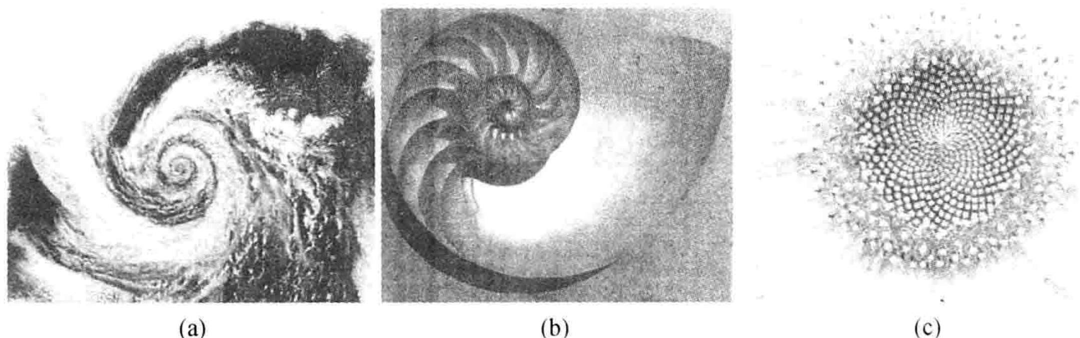
上式右边和阿基米德螺旋(3.1)式右边完全一样，只是左边变成了 $\ln r$，那么在其两边乘上 λ 后为

$$\lambda\ln r(\theta)=a\cdot\lambda\theta=\ln r(\lambda\theta). \tag{3.5}$$

(3.5)式说明，角度由 2π 上的 A 点，再转 2π 变成 4π 后的 B 点，因为按(3.4)式，$\ln OA=a\cdot 2\pi$，$\ln OB=a\cdot 4\pi=2\ln OA$，即 $OB=(OA)^2$，那么原点到 B 点之间的距离是 OA 之间的距离的平方，参看图 3.2.

因此无论是阿基米德螺旋还是对数螺旋，尺度放大或缩小 λ 倍，只要将角度旋转成 $\lambda\theta$，该图像就完全和原图形重合，这就是尺度变换的不变性，或称为标度对称性.

自然界有很多螺旋，如图 3.3(a)的木星大红斑、图 3.3(b)的鹦鹉螺、图 3.3(c)的向日葵等.



(a) (b) (c)

图 3.3 自然界的各种螺旋

(a) 木星大红斑;(b) 鹦鹉螺;(c) 向日葵

为什么我们特别将螺旋和标度变换联系在一起?第十章我们将会看到,螺旋结构是一种典型的自组织、自相似结构.

这里要指出的是,尺度变换的"尺度"或"标度"并不仅仅是空间尺度,也可以是时间尺度. 例如第一章§1.7介绍的气候,年、十年、百年等时间尺度都是气候,而且就气候的平均温度来讲,不外乎是冷或暖,(1.21)式说明时间尺度 a 作了一个变换 δa 后,气候的冷暖就变化了,表现在冷暖转换点的数目 N 发生了变化,但(1.23)式中的 τ 不变.

除了空间尺度和时间尺度以外,谱空间的波数 k 或频率 f 也可作为尺度,因为波数 k 的倒数 $\frac{1}{k}$ 就是长度尺度,频率 f 的倒数就是时间尺度,多尺度系统也可以是波数 k 或频率 f 跨越好多个量级,对 k 或 f 也可以做标度变换 λk 或 λf. 在第八章中我们要介绍在湍流的惯性区内,波数跨越好几个量级,此区内科尔莫戈罗夫理论中,能谱(单位波数的能量) $S(k)$ 为

$$S(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}. \tag{3.6}$$

对(3.6)式中的 k 做标度变换 λk,得到

$$S(\lambda k) \propto \lambda^{-\frac{5}{3}} k^{-\frac{5}{3}} = \lambda^{-\frac{5}{3}} S(k). \tag{3.7}$$

(3.7)式说明,$S(\lambda k)$ 和 $S(k)$ 也只差一个倍数,两者也是自相似的.

同样,在§1.4中,$\frac{1}{f}$ 噪声的功率谱(1.11)式为

$$S(f) \propto f^{-\beta},$$

其中 $S(f)$ 为单位频率能量. 此时频率跨好几个量级,对频率 f 做变换 λf,得到

$$S(\lambda f) \propto \lambda^{-\beta} f^{-\beta} = \lambda^{-\beta} S(f). \tag{3.8}$$

(3.8)式说明,$S(\lambda f)$ 和 $S(f)$ 只差一个倍数,两者也是自相似的.

除了时空、波数、频率以外,物理量本身也可以作为尺度. 在铁磁相变中,温度 T 与临界温度 T_c 的差

$$T-T_c \tag{3.9}$$

就可以作为尺度. 在临界点 T_c上,各种大大小小的涨落的关联长度 ξ 是无穷大,对尺子($T-T_c$)做标度变换 $\lambda(T-T_c)$,关联长度仍然是无穷大,见(1.4)式,这正是威耳逊(Wilson)重正化群理论的基础. 他因此获得了 1982 年诺贝尔物理学奖.

标度变换的不变性,多数是统计意义上的不变性,例如著名的布朗运动轨迹,见图 3.4. 从图 3.4 看出,平面上有些地区轨迹比较密,有些地区则比较疏. 如果把这布朗运动轨迹的右下角做局部放大(尺度变换)则得到左上图,这时更细微的曲折开始显现,但和右下角方框内的弯弯曲曲在统计上是自相似的.

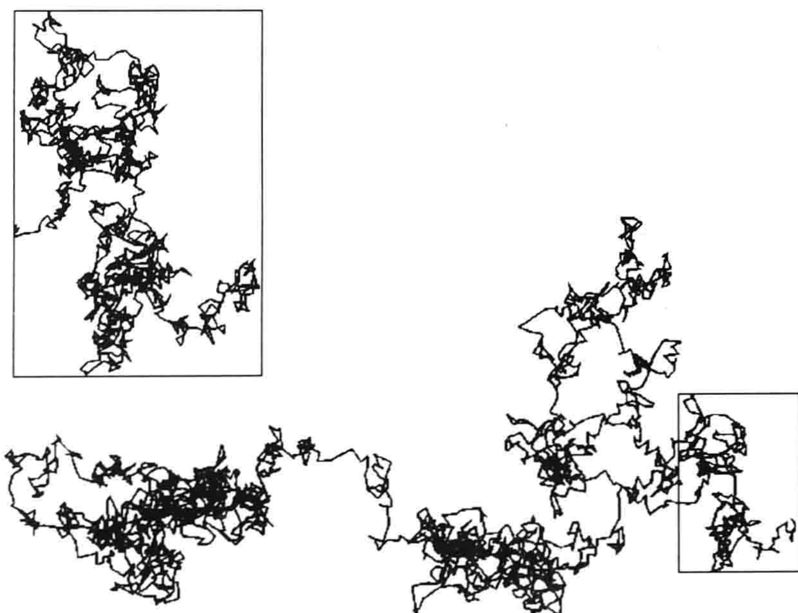


图 3.4 一个粒子做布朗运动的轨迹

§3.2 演化方程的标度变换

除了对螺旋图像和分形现象做标度变换之外,对物理学中的演化方程也可以做标度变换,这是为什么呢? 因为物理学中的许多演化方程并没有规定只能用于某种时空尺度,实际上其适用的范围可以跨越好多时空尺度. 下面我们举几个比较著名的演化方程来说明.

(1) 扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=K\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{3.10}$$

方程(3.10)也是热传导方程,其中 p 可以代表温度、浓度、概率等,K 是扩散

系数.

对(3.10)式中的空间尺度 x,时间尺度 t,以及物理量 p 可做如下标度变换:

$$x'=\lambda^{\alpha}x,\quad t'=\lambda^{\beta}t,\quad p'=\lambda^{\gamma}p. \tag{3.11}$$

将(3.11)式代入(3.10)式,得到

$$\lambda^{\beta-\gamma}\left(\frac{\partial p'}{\partial t'}\right)=\lambda^{2\alpha-\gamma}\left(K\frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2}\right).$$

为了使不同尺度下 p'关于 x',t'的方程和方程(3.10)相同,必须有

$$\beta-\gamma=2\alpha-\gamma,$$

由此导得

$$\beta=2\alpha,\quad \gamma\text{ 任意}. \tag{3.12}$$

例如取 $\alpha=\frac{1}{2}$,$\gamma=-\frac{1}{2}$,$\beta=1$ 就满足这个要求. 因此,我们做标度变换

$$x\to\lambda^{\frac{1}{2}}x,\quad t\to\lambda t \tag{3.13}$$

就得到方程(3.10)式中物理量 p 的标度关系

$$p(\lambda^{\frac{1}{2}}x,\lambda t)=\lambda^{-\frac{1}{2}}p(x,t). \tag{3.14}$$

标度关系(3.14)式有很大用途.

大家所熟知的正态分布

$$p(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi K t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Kt}} \tag{3.15}$$

不但是扩散方程(3.10)的解,而且也满足标度方程(3.14). 正态分布在标度变换(3.13)式下总概率不变,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,t)\mathrm{d}x=\int p(\lambda^{\frac{1}{2}}x,\lambda t)\mathrm{d}(\lambda^{\frac{1}{2}}x)=1. \tag{3.16}$$

在(3.14)式中取 $\lambda=t^{-1}$,则有

$$p(t^{-\frac{1}{2}}x,1)=t^{\frac{1}{2}}p(x,t)$$

或

$$p(x,t)=t^{-\frac{1}{2}}p(t^{-\frac{1}{2}}x,1). \tag{3.17}$$

(3.17)式说明,虽然在图$(p(x,t),x)$上看,随着时间 t 的加大,扩散导致其正态分布越来越扁平,见图 3.5(a),但是在坐标$\left(\frac{p}{t^{-\frac{1}{2}}},\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$图上看,却是同一个正态分布,见图 3.5(b). 这里我们并没有去求方程(3.10)的解,却得到了标度关系式(3.14).

(2) KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\quad(B>0). \tag{3.18}$$

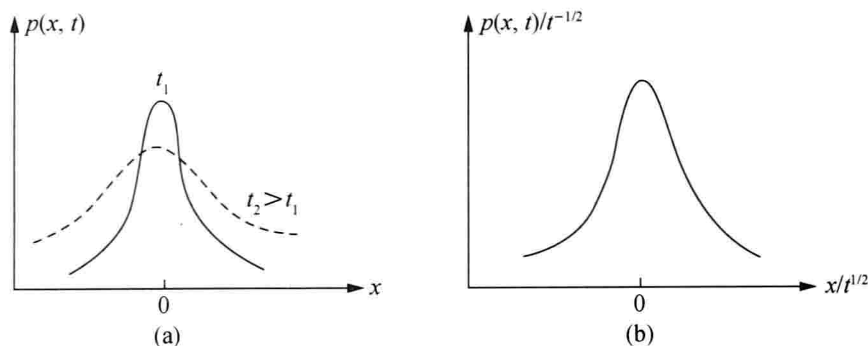


图 3.5 布朗运动的 $(p(x,t),x)$ 和 $\left(\frac{p(x,t)}{t^{-\frac{1}{2}}},\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ 图

这个方程当以 $\xi=x-ct$ 作为自变量时,存在椭圆余弦波的周期解,其振幅小时就是正、余弦波的周期解,振幅比较大时就得到周期为无穷大的孤立波解,振幅居中的则是椭圆余弦波.

对(3.18)式做标度变换

$$x'=\lambda^{\alpha}x,\quad t'=\lambda^{\beta}t,\quad u'=\lambda^{\gamma}u, \tag{3.19}$$

代入(3.18)式,得

$$\lambda^{\beta-\gamma}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'}\right)+\lambda^{\alpha-2\gamma}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)+\lambda^{3\alpha-\gamma}\left(B\frac{\partial^3 u'}{\partial x'^3}\right)=0. \tag{3.20}$$

要保持(3.20)式的形式和(3.18)式相同,必须有

$$\beta-\gamma=\alpha-2\gamma=3\alpha-\gamma, \tag{3.21}$$

因而求得

$$\alpha=-\frac{1}{2}\gamma,\quad \beta=-\frac{3}{2}\gamma. \tag{3.22}$$

取 $\gamma=1$,则有

$$\alpha=-\frac{1}{2},\quad \beta=-\frac{3}{2}, \tag{3.23}$$

也就是在标度变换

$$x'=\lambda^{-\frac{1}{2}}x,\quad t'=\lambda^{-\frac{3}{2}}t,\quad u'=\lambda u \tag{3.24}$$

下方程(3.18)形式不变,且有标度关系

$$u(\lambda^{-\frac{1}{2}}x,\lambda^{-\frac{3}{2}}t)=\lambda\, u(x,t). \tag{3.25}$$

KdV 方程(3.18)的所有解均要满足标度关系(3.25)式. 因为 KdV 方程(3.18)有孤立波解

$$u=3c\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4B}}(x-ct), \tag{3.26}$$

所以将(3.26)式代入(3.25)式，得到

$$u=\frac{3c}{\lambda}\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4B}}(\lambda^{-\frac{1}{2}}x-c\lambda^{-\frac{3}{2}}t),\tag{3.27}$$

也是 KdV 方程的解.

(3.25)式说明尺度 x 缩小 $(\lambda>1)$ 为 $\frac{x}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$，孤立波的振幅由 $3c$ 变小成 $\frac{3c}{\lambda}$ 而波速也变小.

取 $\lambda=2$，那么振幅变小 2 倍，波速则变小 $2^{\frac{3}{2}}=2.8$ 倍. 这是非线性波的特点，即波的振幅和波的速度 c(或频率)有很大的依赖关系.

(3) 纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes 方程，简称 N-S 方程)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla \boldsymbol{v})=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}.\tag{3.28}$$

它是描述黏性流体的动力学方程，p 是压强，$\boldsymbol{v}$ 是速度，$\nu\Delta\boldsymbol{v}$ 是黏性项，ν 是黏滞系数.

我们对 N-S 方程做标度变换

$$\begin{aligned}&x'=\lambda x,\quad t'=\lambda^{1-\alpha}t,\quad v'=\lambda^{\alpha}v,\\&\left(\frac{p}{\rho}\right)'=\lambda^{2\alpha}\left(\frac{p}{\rho}\right),\quad \nu'=\lambda^{\alpha+1}\nu,\end{aligned}\tag{3.29}$$

其中 x,y,z 代表包括 x,y,z 的空间尺度，ν 若理解成湍流交换系数，也应该和尺度有关. 那么在标度变换(3.29)下，N-S 方程形式不变，且无量纲的雷诺(Reynolds)数

$$Re=\frac{vx'}{\nu'}=\frac{\lambda^{\alpha}v\lambda x}{\lambda^{\alpha+1}\nu}=\frac{vx}{\nu}\tag{3.30}$$

不变.

从(3.29)导得标度关系

$$v(\lambda x,\lambda^{1-\alpha}t)=\lambda^{\alpha}v(x,t).\tag{3.31}$$

根据标度变换(3.29)，我们可导得湍流能量耗散率 $\varepsilon\propto\frac{v^3}{x}$(即单位时间所耗散的湍流动能)的标度律为

$$\varepsilon'=\frac{v'^3}{x'}=\frac{\lambda^{3\alpha}v^3}{\lambda x}=\lambda^{3\alpha-1}\varepsilon.\tag{3.32}$$

由(3.32)式可知，当

$$\alpha=\frac{1}{3}\tag{3.33}$$

时湍流动能耗散率随尺度变化是不变的，这正是 1941 年科尔莫戈罗夫理论的结果，详见第八章. 这里我们并没有求解 N-S 方程，却从标度关系(3.32)式中得到

了重要的结果.

(4) 卡达尔-帕里西-张方程(Kardar-Paris-Zhang 方程,简称 KPZ 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\varepsilon, \tag{3.34}$$

其中 u 是分界面的位置,v 是移动速度,D 是扩散系数,x 是空间坐标,t 是时间坐标,ε 是高斯白噪声,它满足

$$\langle\varepsilon(x,t)\varepsilon(x',t')\rangle=2\Gamma\delta(x-x')\delta(t-t'), \tag{3.35}$$

其中 Γ 为噪声强度.它在描述有限扩散凝聚等问题中常用到.

(3.34)式也是随机微分方程.(3.34)式若无非线性项 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$,则称为爱德华兹-威尔金森方程(Edwards-Wilkinson 方程,简称 EW 方程).

我们做坐标尺度变换

$$x'=\lambda x,\quad t'=\lambda^\beta t,\quad u'=\lambda^\alpha u, \tag{3.36}$$

且(3.34)式中的噪声项的变换为

$$\begin{aligned}&\langle\varepsilon(x_1',t_1')\varepsilon(x_2',t_2')\rangle\\&=2\Gamma\delta(x_1'-x_2')\delta(t_1'-t_2')\\&=\lambda^{(1+\beta)}\cdot 2\Gamma\delta(x_1-x_2)(t_1-t_2).\end{aligned} \tag{3.37}$$

将(3.37)式和(3.35)式比较,得到噪声的变换为

$$\varepsilon'=\lambda^{\frac{1}{2}(1+\beta)}\varepsilon. \tag{3.38}$$

将(3.36)和(3.38)式代入方程(3.34)式,得到

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}=\lambda^{2-\beta}D\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\lambda^{-\alpha+2-\beta}\frac{v}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\lambda^{\frac{1+2\alpha-\beta}{2}}\varepsilon'. \tag{3.39}$$

从方程(3.39)看出,要保持方程形式不变,则要求 EW 方程中

$$2-\beta=0,$$
$$1+2\alpha-\beta=0,$$

因此有

$$\beta=2,\quad \alpha=\frac{1}{2},$$

则标度关系为

$$u(\lambda x,\lambda^2 t)=\lambda^{\frac{1}{2}}u(x,t). \tag{3.40}$$

而对于 KPZ 方程,须要求

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha=\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2},$$

因此有

$$\alpha=\frac{1}{3},\quad \beta=\frac{5}{3},\quad D'=\lambda^{\frac{1}{3}}D.$$

故 KPZ 方程(3.34)式的标度关系为

$$u(\lambda x,\lambda^{\frac{5}{3}}t)=\lambda^{\frac{1}{3}}u(x,t). \tag{3.41}$$

这说明对随机微分方程也可以做标度变换.

§3.3 物理学中的幂律函数

对多尺度现象进行标度变换,总导致物理量随尺度的幂律关系,如(3.1),(3.6),(3.7)式等,因此幂函数和分形现象有密切关系.

在物理定律中有许多幂函数关系. 例如任意两个物体之间均存在万有引力,力的大小和两个物体之间的距离 r 的平方成反比:

$$f(r)\propto\frac{1}{r^2}. \tag{3.42}$$

(3.42)式就是幂函数关系.

在物理学中,幂函数有什么用呢? 下面我们用例子说明.

首先来看一个质量为 m 的物体在月球和地球上的重力加速度有什么不同. 按照牛顿第二定律,在月球或地球上质量为 m 的物体在只受重力时运动定律为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=ma=f=G\frac{M\cdot m}{r^2}=-\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{3.43}$$

其中 f 是引力,G 是引力常数,M 是月球或地球的质量,a 是重力加速度,V 是重力势能. 在(3.43)式的右端,我们可以把量$\frac{M}{r^2}$看成是尺度 $l=\frac{M}{r^2}$. 由于地球和月球的质量和半径 r 都不同,因而尺度 l 也不同. 由于月球质量约是地球质量的$\frac{1}{81}$,月球半径约是地球半径的$\frac{1}{3.7}$,那么月球的尺度和地球的尺度之比为

$$\lambda=\frac{l_{月球}}{l_{地球}}=\frac{\frac{M_{月球}}{r^2_{月球}}}{\frac{M_{地球}}{r^2_{地球}}}=\frac{\frac{M_{月球}}{M_{地球}}}{\left(\frac{r_{月球}}{r_{地球}}\right)^2}$$

$$\approx\frac{\frac{1}{81}}{\left(\frac{1}{3.7}\right)^2}\approx\frac{1}{6}. \tag{3.44}$$

因为由(3.43)式,重力加速度 a 和 l 成正比,所以由(3.44)式,月球的重力加速度 $a_{月}$ 是地球的重力加速度 $a_{地}$ 的$\frac{1}{6}$,即

$$a\left(\frac{1}{6}l\right)=\frac{1}{6}a(l). \tag{3.45}$$

(3.45)式说明,尺度由 l 变换(缩小)6 倍,那么重力加速度也缩小 6 倍.

可见用尺度变换给我们的问题带来很大方便,我们没有解方程就找到了问题的答案.

我们再讨论火箭逃逸月球和逃逸地球的宇宙速度之比是多少.火箭逃逸的临界条件是

$$\frac{1}{2}mv^2=V=G\frac{Mm}{r}. \tag{3.46}$$

此时若将$\frac{M}{r}$看成是尺度 l,那么逃逸速度 v 和尺度 l 的平方根成正比,因此月球逃逸速度 $v_{月球}$ 和地球逃逸速度 $v_{地球}$ 之比为

$$\frac{v_{月球}}{v_{地球}}=\sqrt{\frac{l_{月球}}{l_{地球}}}=\sqrt{\frac{\frac{M_{月球}}{r_{月球}}}{\frac{M_{地球}}{r_{地球}}}}=\sqrt{\frac{\frac{M_{月球}}{M_{地球}}}{\frac{r_{月球}}{r_{地球}}}}$$

$$\approx\sqrt{\frac{\frac{1}{81}}{\frac{1}{3.7}}}\approx\frac{1}{4.7}. \tag{3.47}$$

(3.47)式意味着当尺度 l 缩小为$\frac{1}{(4.7)^2}\approx\frac{1}{22}$时,逃逸速度缩小为$\frac{1}{4.7}$,即

$$v\left(\frac{1}{22}l\right)=\frac{1}{4.7}v(l). \tag{3.48}$$

以上两个例子说明了尺度变换对研究物理问题的重要性.

除了万有引力是幂函数关系外,还有很多其他例子:电学上的两个点电荷之间的作用力也是与两者距离 r 的平方成反比的(库仑定律).力学中的胡克定律,回复力的大小和拉伸长度 r 的一次方成正比.自由落体下落的距离和时间 t 的平方 t^2 成正比.行星运动的开普勒第三定律,轨道周期 T 和半轴 a 的$\frac{3}{2}$次方 $a^{\frac{3}{2}}$ 成正比.量子力学中能级(能量本征值)E_n 和量子数 n 的幂次方 n^{α} 成正比(例如对氢原子,$\alpha=-2$).总之幂函数用标度变换研究有时会很方便.

在经济学中,考虑收入 X 大于 x 的人数 N,显然 x 愈大,N 愈小,这是著名的帕雷托(Pareto)定律:$N(X)>x\propto x^{-m}$.类似地,在语言中按单词出现的频率 f 来排序,则频率与名次 r 之间有关系 $f\propto r^{-b}$,这称为齐普夫(Zipf)定律.它们都是幂函数关系.

幂函数不但在标度变换中起重要的作用,而且在研究长程相关和重尾分布

中起关键作用. 为了比较指数函数 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和幂函数 x^{-2},我们绘制出了这两种概率密度函数随 x 的变化,见图 3.6. 从图 3.6 可以看出,指数函数随 x 的增大衰减得很快,而幂函数的衰减则慢得多. 如果纵坐标代表概率密度分布函数,那么幂函数在 x 很大时仍有一定的概率,这说明极端大的 x 事件(极值事件)或大涨落在多尺度现象中出现的概率虽小,但相对于正态分布而言仍有相当大的概率. 这种幂函数的概率分布称为重尾分布. 若纵坐标代表相关函数,那么幂函数衰减得慢,在 x 很大时仍有一定关联,这称为长程相关. 这些内容我们已在第二章讨论过,以后还将给予论述.

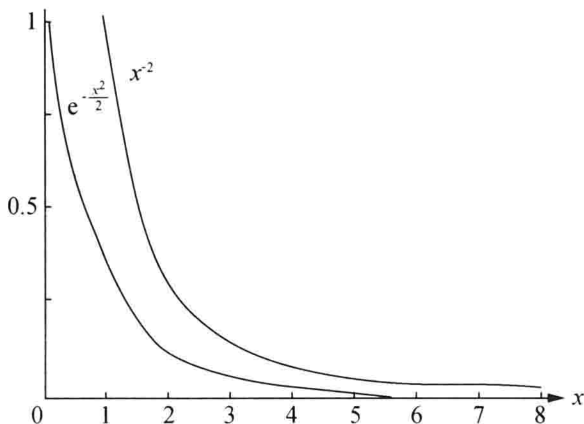


图 3.6 指数函数 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和幂函数 x^{-2}

这里我们特别提一下对数正态分布. 若 x 是对数随机变量,那么 $\ln x$ 就符合正态分布,即对数正态分布的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.49}$$

其中 $\ln x$ 的平均值为

$$\langle\ln x\rangle=\ln x_0,$$

方差为

$$\langle(\ln x)^2\rangle-\langle\ln x\rangle^2=\sigma^2.$$

对数正态分布的图像见图 3.7. 从图 3.7 看出,在 x 数值较大时,它呈现出幂律分布,见图 3.8.

实际上,将(3.49)式两边取对数,得

$$\begin{aligned}\ln p(x)&=-\ln\sqrt{2\pi}\sigma-\ln x-\frac{(\ln x-\ln x_0)^2}{2\sigma^2}\\&=\left(-\frac{(\ln x_0)^2}{2\sigma^2}-\ln\sqrt{2\pi}\sigma\right)-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}+\left(\frac{\ln x_0}{\sigma^2}-1\right)\ln x.\end{aligned} \tag{3.50}$$

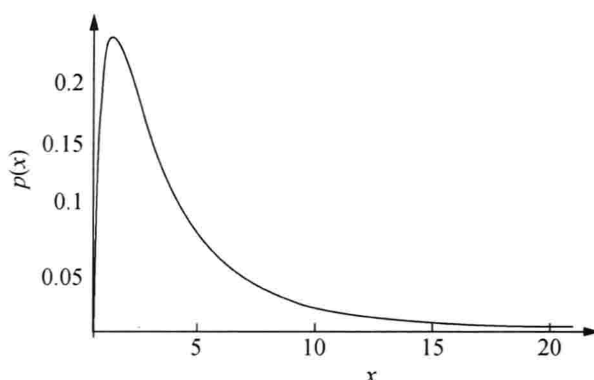


图 3.7 对数正态分布的概率密度函数($x_0=\mathrm{e}, \sigma=1$)

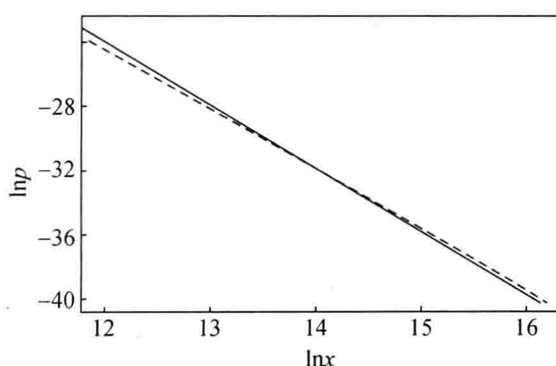


图 3.8 对数正态分布所显示的幂律分布($x_0=\mathrm{e}, \sigma=-3.873$)

(3.50)式右端第一项括号为常数项,右端第二项若 $\sigma \gg \ln x$ 则可以略去,因此该式就成为 $\ln p=$ 常数 $+\left(\frac{\ln x_0}{\sigma^2}-1\right)\ln x$. 因而只要 x 和 σ 足够大,p 和 x 的关系就是幂函数. 图 3.9 中列出了不同 σ 的对数正态分布以及与幂律 $p(x)=x^{-1}$ 分布的比较. 从图 3.9 看出,只要 x 足够大,对数正态分布很接近幂律分布.

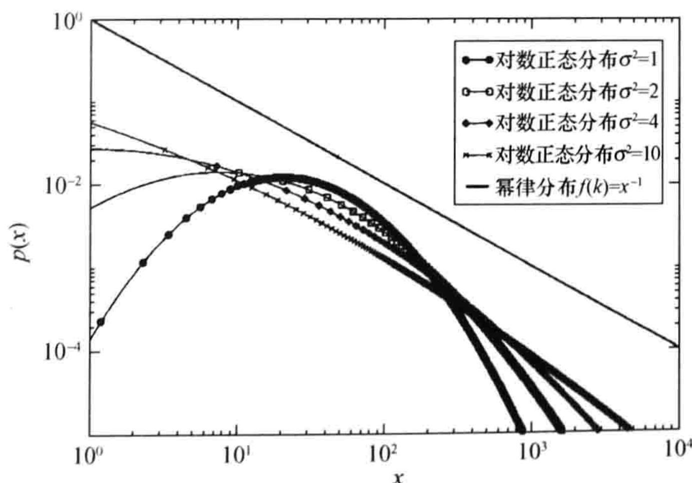


图 3.9 带有不同的 σ 的对数正态分布和幂律 x^{-1} 分布比较

§3.4 与标度有关的函数方程

标度变换中常见的一个函数方程是

$$f(\lambda x)=\lambda^{\alpha}f(x), \tag{3.51}$$

如(2.48),(3.3),(3.7),(3.8),(3.45),(3.48)式等,它是函数 $f(x)$ 和 $f(\lambda x)$ 之间的关系式. (3.51)也称为标度方程.

(3.51)式只有一个自变量,有时还会遇到有两个或多个自变量的函数方程,如

$$f(\lambda^{\alpha}x,\lambda^{\beta}y)=\lambda f(x,y), \tag{3.52}$$

$$f(\lambda^{\alpha}x,\lambda^{\beta}y)=\lambda^{\gamma}f(x,y), \tag{3.53}$$

例如(3.25),(3.31)式等. 当(3.53)式中 $\alpha=\beta=1$ 时,则为

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\gamma}f(x,y). \tag{3.54}$$

方程(3.54)称为欧拉函数方程.

这些函数方程的解对研究标度变换的不变性至关重要.

我们令 $\lambda=\frac{1}{x}$,代入(3.51)的左边,得到

$$f\left(\frac{1}{x}x\right)=f(1)=A(\text{常数}),$$

那么(3.51)式就为

$$A=\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}f(x), \tag{3.55}$$

所以

$$f(x)=Ax^{\alpha} \tag{3.56}$$

是函数方程(3.51)式的解.

(3.56)式是一个幂函数,第一、二章以及本章前面的所有标度方程的解也都是幂函数,这正是(3.56)式的结果.

现在求函数方程(3.52)的解. 在(3.52)式中令 $\lambda=x^{-\frac{1}{\alpha}}$,那么(3.52)式的左边就是

$$f(x^{-1}x,x^{-\frac{\beta}{\alpha}}y)=f(1,x^{-\frac{\beta}{\alpha}}y)=F\left(\frac{y}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right), \tag{3.57}$$

其中 $F\left(\frac{y}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)$ 是 $\frac{y}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}$ 的任意函数. 此时(3.52)式就变成

$$F=x^{-\frac{1}{\alpha}}f(x,y).$$

即

$$f(x,y)=x^{\frac{1}{\alpha}}F\left(\frac{y}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right). \tag{3.58}$$

它就是函数方程(3.52)的解.

类似地,在(3.52)式中令 $\lambda=y^{-\frac{1}{\beta}}$,并令 $f(xy^{-\frac{\alpha}{\beta}},1)=G\left(\frac{x}{y^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)$,则(3.52)式变成

$$f(x,y)=y^{\frac{1}{\beta}}G\left(\frac{x}{y^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right). \tag{3.59}$$

它也是函数方程(3.52)的解,其中 $G\left(\frac{x}{y^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)$是$\left(\frac{x}{y^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)$的任意函数.

在函数方程(3.53)中分别令 $\lambda=x^{-\frac{1}{\alpha}}$ 和 $\lambda=y^{-\frac{1}{\beta}}$,可求得函数方程(3.53)的解分别为

$$f(x,y)=x^{\frac{\gamma}{\alpha}}F\left(\frac{y}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right) \tag{3.60}$$

和

$$f(x,y)=y^{\frac{\gamma}{\beta}}G\left(\frac{x}{y^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right), \tag{3.61}$$

其中 F,G 是其自变量的任意函数.

我们现在利用函数方程的解求出相变现象中各种标度指数的关系. 一般描述相变的物理量主要是自由能 f,它是无量纲临界温度 $t=\frac{T-T_c}{T_c}$ 和无量纲磁场 h 的二元函数,即

$$f(t,h). \tag{3.62}$$

我们对 t 和 h 以及 f 做标度变换

$$t\to\lambda^p t,\quad h\to\lambda^q h,\quad f\to\lambda f, \tag{3.63}$$

那么就得到函数方程

$$f(\lambda^p t,\lambda^q h)=\lambda f(t,h). \tag{3.64}$$

(3.64)式完全和函数方程(3.52)式相同. 自旋磁化强度 M 是自由能 f 对 h 的微商 $M\propto\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_t$. 将(3.64)式两边对 h 微商,得

$$\frac{\partial f(\lambda^p t,\lambda^q h)}{\partial\lambda^q h}\frac{\partial\lambda^q h}{\partial h}=M(\lambda^p t,\lambda^q h)\lambda^q=\lambda M(t,h),$$

由此可推出 M 的函数方程

$$M(\lambda^p t,\lambda^q h)=\lambda^{1-q}M(t,h). \tag{3.65}$$

在(3.65)式中令 $h=0$,得

$$M(\lambda^p t,0)=\lambda^{1-q}M(t,0), \tag{3.66}$$

在(3.65)式中令 $t=0$，得

$$M(0,\lambda^q h)=\lambda^{1-q}M(0,h). \tag{3.67}$$

(3.66)式和(3.67)式就分别相当于一个变量 t 和 h 的函数方程(3.51)式，所以(3.66)，(3.67)式的解分别为

$$M(t)\propto t^{\frac{1-q}{p}}=t^{\beta}, \tag{3.68}$$

$$M(h)\propto h^{\frac{1-q}{q}}=h^{\frac{1}{\delta}}. \tag{3.69}$$

(3.68)式说明磁化强度 M 对 t 的标度指数为

$$\beta=\frac{1-q}{p}, \tag{3.70}$$

而(3.69)式说明磁化强度 M 对 h 的标度指数为

$$\delta=\frac{q}{1-q}. \tag{3.71}$$

磁化率 χ 是 M 对 h 的微商 $\chi\propto\left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)_t$，那么由(3.65)导得磁化率 χ 的函数方程为

$$\chi(\lambda^p t,\lambda^q h)\lambda^q=\lambda^{1-q}\chi(t,h),$$

即

$$\chi(\lambda^p t,\lambda^q h)=\lambda^{1-2q}\chi(t,h). \tag{3.72}$$

比热 c 是自由能 f 对 t 的二阶微商 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_h$，故由(3.64)式得到比热 c 的函数方程为

$$c(\lambda^p t,\lambda^q h)\lambda^{2p}=\lambda c(t,h)$$

或

$$c(\lambda^p t,\lambda^q h)=\lambda^{1-2p}c(t,h). \tag{3.73}$$

在(3.72)式中令 $h=0$，求得解为

$$\chi\propto t^{\frac{1-2q}{p}}=t^{-\gamma}, \tag{3.74}$$

在(3.73)式中令 $h=0$，求得解为

$$c\propto t^{\frac{1-2p}{p}}=t^{-\alpha}, \tag{3.75}$$

这样就得到磁化率 χ 和比热 c 的标度指数分别是

$$\gamma=\frac{2q-1}{p}, \tag{3.76}$$

和

$$\alpha=\frac{2p-1}{p}. \tag{3.77}$$

由(3.70),(3.71),(3.76)和(3.77)式,可以推出 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 之间有如下关系:

$$\begin{aligned} \alpha+2\beta+\gamma &= 2, \\ \gamma &= \beta(\delta-1). \end{aligned} \tag{3.78}$$

关系(3.78)式称为相变的标度律,它们是普适的,是研究相变的重要关系.

§ 3.5　迭代函数方程

从 § 2.4 我们看到,自我复制过程通常是一个迭代过程,它一般可用迭代函数方程

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{3.79}$$

表示,例如方程(2.29)中,

$$f(x_n)=\frac{1}{3}x_n$$

和

$$f(x_n)=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}. \tag{3.80}$$

这里 $\frac{1}{3}x_n$ 就是做了一个收缩的标度变换,它将长度为 1 的区间 $[0,1]$ 分别变换成长度为 $\frac{1}{3}$ 的区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},1\right]$.

以下是两种常见的迭代函数方程:

$$x_{n+1}=f(x_n)=\begin{cases} 2x_n,0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2}, \\ 2-2x_n,\frac{1}{2}<x_n\leqslant 1, \end{cases} \tag{3.81}$$

和

$$x_{n+1}=f(x_n)=\begin{cases} 2x_n,0\leqslant x_n<\frac{1}{2}, \\ 2x_n-1,\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1. \end{cases} \tag{3.82}$$

$f(x_n)$ 的图像分别见图 3.10 和图 3.11. (3.81)式和(3.82)式分别称为帐篷变换和锯齿变换.

从图 3.10 和图 3.11 看出,(3.81),(3.82)式右端的因子 2 都将区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 通过标度变换伸长了一倍,变成 $[0,1]$.

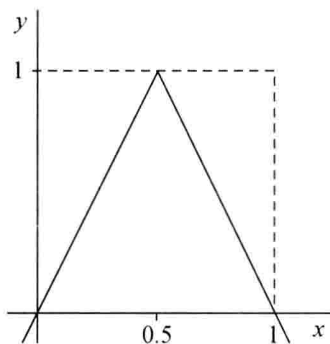


图 3.10 帐篷变换

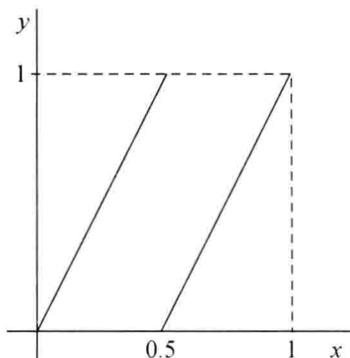


图 3.11 锯齿变换

再迭代一次会有什么结果呢？此时就要将左边的结果再代入右边，即

$$f(f(x_n)).\tag{3.83}$$

此时，由于 $f(x_n)$ 的区间已是$[0,1]$，若再通过变换加倍，区间就变成$[0,2]$，这已经不符合(3.81)，(3.82)式右边 x 只能处在$[0,1]$区间的要求了. 此时只能将(3.83)式的大圆括号内的区间改成$\left[0,\frac{1}{4}\right]$，$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$，$\left[\frac{3}{4},1\right]$. 首先将(3.81)式左边得到的 $2x_n$ 代入(3.81)式右端的第一、二式，有

$$f(f(x_n))=\begin{cases}2(2x_n)=4x_n, & 0\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1}{4},\\ 2-2(2x_n)=2-4x_n, & \dfrac{1}{4}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}\tag{3.84}$$

然后将(3.81)式左边得到的$(2-2x_n)$代入(3.81)式右端的第一、二式，得到

$$f(f(x_n))=\begin{cases}2(2-2x_n)=4-4x_n, & \dfrac{3}{4}\leqslant x_n\leqslant 1,\\ 2-2(2-2x_n)=4x_n-2, & \dfrac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{3}{4},\end{cases}\tag{3.85}$$

见图 3.12. 从图 3.12 看出，若 $f(x_n)$对应于图 3.10 的正斜率部分代表大儿子，负斜率部分代表小儿子，那么 $f(f(x_n))$对应于图 3.12 的第一、三两段正斜率部分就是大儿子的两个孩子，图 3.12 的第二、四两段负斜率部分就是小儿子的两个孩子. 正如我们在 § 2.7 中所述，(3.81)或(3.82)式的迭代过程输出不仅仅只取决于输入，还要看左边输出的结果. 输出 x_{n+1} 是处在第一式还是第二式的区间，这就体现了记忆性. 从一个帐篷变换出两个帐篷，从两个帐篷再变出四个帐篷，底部尺度则以$\left(\frac{1}{2}\right)^n$缩小.

类似地，对图 3.11 所示的锯齿变换，$f(f(x_n))$的图像见图 3.13. 其表达式是

$$f(f(x_n))=\begin{cases}4x_n, & 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{4},\\ 4x_n-1, & \frac{1}{4}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2},\\ 4x_n-2, & \frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{3}{4},\\ 4x_n-3, & \frac{3}{4}\leqslant x_n\leqslant 1.\end{cases} \tag{3.86}$$

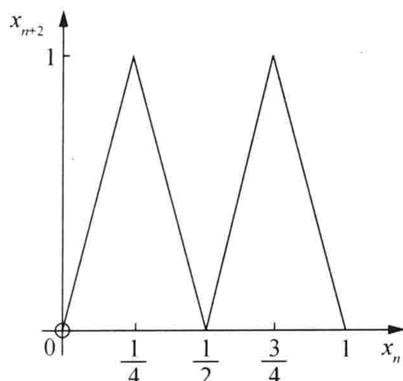


图 3.12 帐篷变换 $f(f(x_n))$ 图像

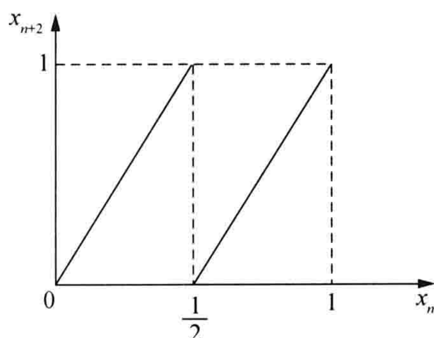


图 3.13 锯齿变换 $f(f(x))$ 图像

对帐篷变换(3.84)式有

$$f(f(x))=f(2x), \tag{3.87}$$

而对(3.85)式有

$$f(f(x))=f(2-2x). \tag{3.88}$$

(3.87),(3.88)式的迭代变换,反映了图 3.10 和图 3.12 的自相似性.(3.84)式说明迭代一次以后,正斜率的部分的斜率比 $f(x)$ 增加一倍,负斜率的部分的斜率也增加一倍,相应地,横轴上的区间减小一半. 对于(3.86)式也有类似的结果.

§3.6 迭代变换的非线性物理

在第二章中,我们介绍了分形的基本物理特征之一——自我复制. 上节所谈到的帐篷变换与锯齿变换正好说明了许多物理现象的共性.

先以热对流为例. 在炎热的夏天,太阳将地面晒得很热,造成空气底层的温度 $T_下$ 比空气高层的温度 $T_上$ 高很多,当上下层的温度差 $\Delta T=T_下-T_上$ 超过一定数值,浮力就使空气团上升,而由于高空温度比较低,水气就容易饱和而形成水滴状的对流云. 但另一方面,热的空气上升后与高空的冷气相混合,反而降低

了造成上升运动的温差 ΔT,为了补充下层空气上升的空缺,上层冷空气就要下沉,造成上下空气双向对流. 这正是非线性的效应,因为若是线性的话,上升的空气就一直向上升,不会回来的.

帐篷变换(3.81)式和锯齿变换(3.82)式虽然是分段线性,但总体还是非线性的变换. 帐篷变换(3.81)式右端的 $2x$ 项是将原有的区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 均匀伸长两倍,见图 3.14. 从物理上讲,这种伸长就是要改变原有的状态,如热对流过程中,原来空气处在静止状态,通过伸长(离开静止状态)而变成对流状态. 帐篷变换(3.81)式的第二式 $2-2x_n$ 项,又将伸长的间隔折叠回来,不让状态不断伸长到无穷,见图 3.14(b),正如热对流问题中又产生了下沉运动. 物理上这是非线性和耗散因素共同作用的结果.

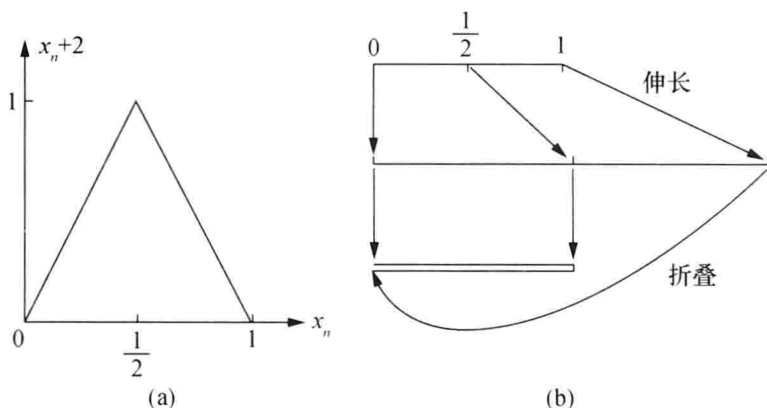


图 3.14 帐篷变换及其伸长和折叠

每迭代一次就要伸长和折叠,这个过程不断重复,就会产生很复杂的结构,正像热对流到最后产生积雨云,其中会有大大小小涡旋的湍流结构一样.

对于锯齿变换(3.82)式,当我们把 x 看成是一个角变量,那么 x 从 0 到 1 相当于沿圆周转一圈. (3.82)式右端的 $2x$ 项相当于圆周长伸长一倍,但仍然保持角变量是 0 到 1,见图 3.15,但是(3.82)式中右端 $x=\frac{1}{2}$ 处又变换成 1,所以就相当于扭转成一个 8 字形的图,上面和下面各是一个原来长度的圆,见图 3.15(c),最后 8 字形上面一个圆折叠下来成两个重叠的圆. 这样原来图 3.14(a)图下方的黑点,经过锯齿变换变成图 3.15(d)中双圆下方的黑点.

每迭代一次要经过伸长、扭转和折叠. 如热对流中,迭代一次就产生一个涡旋,多项迭代重复,就在积雨云中产生大大小小不同的涡旋.

下面再介绍几个二维迭代变换.

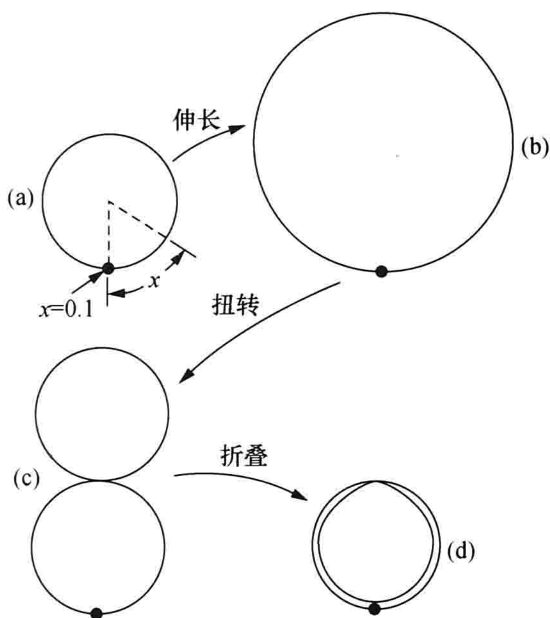


图 3.15 锯齿变换的伸长、扭转和折叠

(1) 折叠面包师变换. 该变换为

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n, \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{2}, \end{cases} \quad 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2}, \quad 0\leqslant y_n\leqslant 1; \tag{3.89}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=2-2x_n, \\ y_{n+1}=1-\dfrac{y_n}{2}, \end{cases} \quad \frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1, \quad 0\leqslant y_n\leqslant 1. \tag{3.90}$$

可以看出,(3.89)和(3.90)的第一式和(3.81)式完全相同. (3.89)第一式说明,x 处在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时伸长到区间[0,1],见图 3.16(a)虚垂线的左边,而(3.90)第一式说明,x 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时,若在 $x_n=\frac{1}{2}$,x_{n+1} 变为 1,若 $x_n=1$,x_{n+1} 变为零. 这就意味着图 3.16(a)虚垂线右边的部分要倒过来再翻上去(即折叠). 为此我们在图中画上了箭头,虚垂线左边的在下方,虚垂线右边的在上方.

从物理上讲,若图中箭头代表物质流动的方向,单位时间流过去的物质量是通量. 图 3.16(a)正说明由流动引起的通量迭代一次就相消了.

(2) 堆积面包师标度变换. 它的表达式是

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n, \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{2}, \end{cases} \quad 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2}, \quad 0\leqslant y_n\leqslant 1; \tag{3.91}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-1, \\ y_{n+1}=\dfrac{1+y_n}{2}, \end{cases} \quad \frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1, \quad 0\leqslant y_n\leqslant 1. \tag{3.92}$$

(3.91),(3.92)式的 x 方向变换和锯齿变换(3.92)式相同. 标度变换的第一步仍然是伸长,和折叠面包师变换图 3.16(a)完全相同(见图 3.16(b)),但是 y 方向分别变换成 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2},1\right]$. 这样,图 3.16(b)的虚垂线右边的那一段就相当于堆积到虚垂线的上方向(请注意箭头的方向,上半块箭头和下半块箭头相同),因此堆积面包师变换,迭代一次物理量的通量就加倍了.

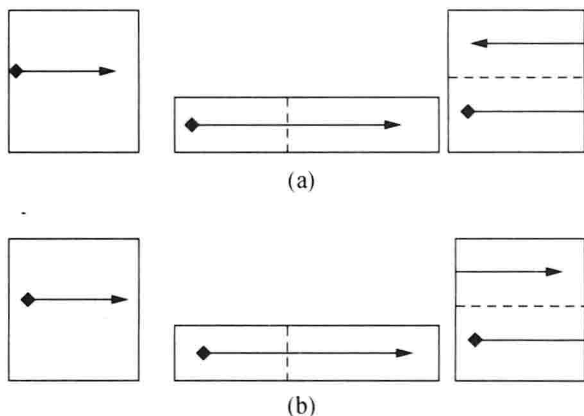


图 3.16　折叠面包师变换和堆积的面包师变换

(a) 折叠映射;(b) 堆积映射

(3) 物理上除了伸长、折叠、扭转的因子以外,还有剪切(shear)因子. 下面是包含伸长、折叠和剪切三个因子的三维迭代变换:

$$(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})\rightarrow\begin{cases} \left(2x_n,\dfrac{y_n}{2},f\left(\dfrac{y_n}{2}\right)\right), \\ \left(2x_n,\dfrac{y_n}{2},f\left(\dfrac{y_n}{2}\right)\right), \end{cases} \quad 0\leqslant x_n<\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\leqslant y_n<1, \tag{3.93}$$

其中 $f(y)=y-\dfrac{1}{2}$.

从(3.93)式看出,(x,y) 方向就是折叠面包师变换,z 方向发生剪切. 这种伸长、折叠和剪切的过程见图 3.17.

从以上几个非线性标度迭代变换看出,系统状态演化的主要因子或几何实质是伸长、折叠、扭转和剪切,这是非线性标度变换的特征. 而传统的线性动力学,从几何上看是不动或是兜圈子. 因此非线性变换可以得到丰富多彩的形态.

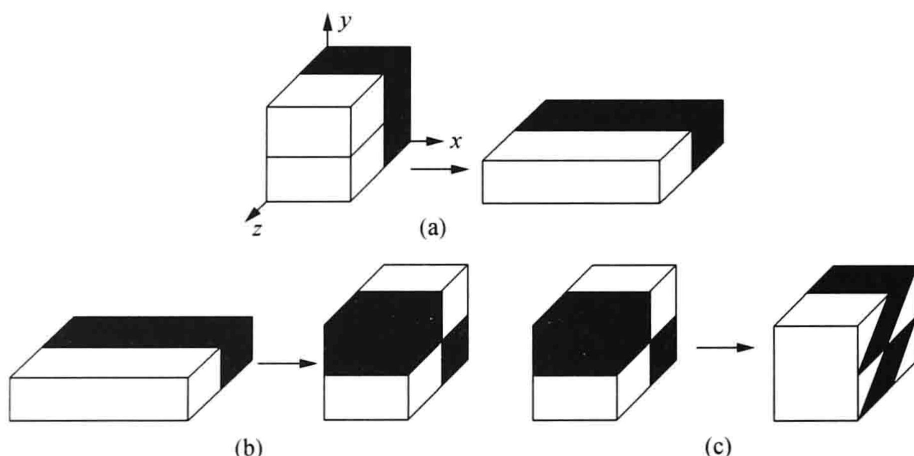


图 3.17 伸长、折叠和剪切的标度变换

§3.7 尺度的"伽利略变换"和"洛伦兹变换"

从前面我们知道，分形客体的长度是随尺子的长度变化而变化的，但是分数维 D 不变，由(2.6)式，分形曲线的长度 L 为

$$L=L_0 r^{d-D} \quad (d=1), \tag{3.94}$$

其中 L_0 是分数维 $D=1$ 时的直线的长度. 在(2.6)式中我们取 $L_0=1$.

这种分形特征使我们想起爱因斯坦的"运动相对性"(狭义相对性)，时间间隔和物体长度都是随参考系的速度变化而变化的. 分形长度随尺子的变化而变化，这说明存在着"尺度相对性".

下面我们看"运动相对性"和"尺度相对性"是如何联系的. 我们将(3.94)式两边取对数，得到

$$\ln L(r)=\ln L_0+(1-D)\ln r. \tag{3.95}$$

对(3.95)式两边微商，有

$$\frac{\mathrm{d}L}{L}=(1-D)\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{3.96}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\ln r}=(1-D)L. \tag{3.97}$$

(3.97)式称为尺度微分方程. 在第四章重正化群变换中有许多和(3.97)式类似的方程.

现在我们对(3.95)式做尺度变换

$$r\to r', \tag{3.98}$$

得到

$$\ln L(r')=\ln L_0+(1-D)\ln r'. \tag{3.99}$$

将(3.99)式减去(3.95)式,得到

$$\ln L(r')=\ln L(r)+(1-D)\ln\frac{r'}{r}. \tag{3.100}$$

在(3.100)式中,如果我们设

$$\begin{aligned}&\ln L(r')=x',\\&\ln L(r)=x,\\&1-D=-t,\\&\ln\frac{r'}{r}=v,\end{aligned} \tag{3.101}$$

那么(3.100)式的尺度变换就可以写成

$$\begin{aligned}&x'=x-vt,\\&t'(r')=t(r).\end{aligned} \tag{3.102}$$

(3.102)式就是“伽利略变换”.

(3.101)式说明,在“尺度相对性”中分形客体的长度的对数相当于“运动相对性”中的空间坐标,它随尺子变化而变化,而“尺度相对性”中的尺子变换的对数相当于“运动相对性”的两个坐标系的相对速度.

若连续做尺度变换

$$r\to r'\to r'', \tag{3.103}$$

由于

$$\frac{r''}{r}=\frac{r''}{r'}\frac{r'}{r}\left(\mu=\alpha\beta,\mu=\frac{r''}{r},\alpha=\frac{r''}{r'},\beta=\frac{r'}{r}\right), \tag{3.104}$$

故

$$\ln\frac{r''}{r}=\ln\frac{r''}{r'}+\ln\frac{r'}{r}, \tag{3.105}$$

按照(3.101)式的符号,就有

$$w=u+v. \tag{3.106}$$

(3.106)式的相对性原理是和牛顿的绝对时空观相联系的.

具体一点,空间平移对称性(或不变性)导致动量守恒定律,时间平移对称性导致能量守恒定律,量子力学中整体相相移的对称性就导致电荷守恒定律.但是在实际的自然界中,分形客体的长度随尺度变化而变化,总存在一个尺度上限,当尺度 r 大于这个上限时,这种分形客体的标度律或尺度依赖关系就不成立了.

如将“伽利略变换”(3.106)式变成“洛伦兹变换”

$$W=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}},\tag{3.107}$$

其中 c 就相当于客观存在的尺度无量纲最大值. 我们设

$$c=\ln K,\tag{3.108}$$

将(3.104)和(3.108)式代入(3.107)式,得到

$$\ln\mu=\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{1+\frac{\ln\alpha\ln\beta}{\ln^2 K}}.\tag{3.109}$$

将(3.109)式中的对数换成以 K 为底的对数,得

$$\log_K\mu=\frac{\log_K\alpha\cdot\log_K\beta}{1+\log_K\alpha\cdot\log_K\beta}.\tag{3.110}$$

(3.109)式就是“尺度相对性”中的“洛伦兹变换”.

将“尺度相对性”的“伽利略变换”(3.104)和“洛伦兹变换”(3.109)比较,可看出在“伽利略变换”中,尺度不收缩,即

$$\mu=\alpha\beta.$$

而由“洛伦兹变换”(3.109),得到

$$\ln\mu=\ln\left[(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\frac{\ln\alpha\cdot\ln\beta}{\ln^2 K}}}\right]\tag{3.111}$$

或

$$\mu=(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\frac{\ln\alpha\cdot\ln\beta}{\ln^2 K}}}.\tag{3.112}$$

(3.111)式说明,经过连续的尺度变换后,和“运动相对性”类似,长度缩短了,时间膨胀了.

§ 3.8　复杂结构的涌现

前面我们看出,标度变换不但可以求出标度指数,还可以验证演化方程的标度不变性. 具有尺度变换的迭代函数系统可以产生分形层次结构,如 § 2.5 的分形树,§ 3.6 的伸长、折叠、扭转而形成的复杂结构等.

下面举一个带有伸长、折叠的二维非线性迭代函数系统的例子,其迭代关系为

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=0.95y_n-0.8x_n+\frac{3.6x_n^{\,2}}{1+x_n^{\,2}},\\ y_{n+1}&=-x_n-0.8x_{n+1}+\frac{3.6x_{n+1}^{\,2}}{1+x_{n+1}^{\,2}}.\end{aligned}\tag{3.113}$$

我们给出一个初值(x_0,y_0),(3.113)式可以在(x,y)平面上产生一系列的点对(x_n,y_n),经过多次迭代会涌现出一个翅膀状的结构,见图 3.18.

如果将二维系统(3.113)式扩展至三维,即

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 0.95 y_n - 0.8 x_n + \frac{3.6 x_n^2}{1 + x_n^2} - 0.6 z_n, \\
y_{n+1} &= - x_n - 0.8 x_{n+1} + \frac{3.6 x_{n+1}^2}{1 + x_{n+1}^2}, \qquad (3.114) \\
z_{n+1} &= 0.23 y_n + 0.21 z_n^2,
\end{aligned}
$$

则可产生一个三维翅膀状的结构,见图 3.19.

这两个迭代函数系统说明,通过简单的自我复制或迭代过程,经过多次伸长、折叠、扭转,在整体上可以涌现出美丽复杂的结构.



图 3.18 映射(3.113)式产生的斑图



图 3.19 映射(3.114)式产生的斑图

小　　结

标(尺)度变换反映出,物理学中的伸长、折叠和扭转等过程可以形成复杂的结构. 这种标度变换也可以反映出物理学和生物学中的某些自我复制过程.

标度变换在物理学中有很多用途,不但可以导出许多有用的关系,如相变中的标度律等,而且可以导出数学物理演化方程中的标度律.

标度变换后,分形客体的长度随着标度变换而变化,这是“尺度的相对性”. 在自然界中普遍存在着尺度的上限,此时分形客体的长度和尺度的依赖关系不再成立.

在自然界中还存在最大的尺度比值 c,它相当于“运动相对性”的光速,这时“尺度相对性”的“伽利略变换”就变成“尺度相对性”的“洛伦兹变换”.

第四章　重正化群变换

多尺度系统在相变的临界点处各种尺度大大小小的涨落都有，我们自然要问，为什么很小尺度的涨落会导致在大尺度上可被观察到的相变现象或逾渗现象呢？正像多米诺效应或滚雪球效应一样，初始的局部扰动会长时间产生各种尺度相互作用的协作效应．为了看清楚这种相互作用的协作效应，关键的一步是减少自由度，即将好几个小涨落集团组成一个较大集团．正像图 1.2(a)说明的，集团之间的距离大了 λ 倍，那么关联长度（或逾渗的平均尺度）就减小了 λ 倍，即由 ξ 变成 $\frac{\xi}{\lambda}$，这种变换就是重正化群变换．由于在临界点处关联长度 ξ 变成无穷大，因而这种变换并不会改变系统的性质．重正化群变换是物理学中的尺度变换．

§4.1　重正化群变换的实质

临界现象的基本特点是在临界点处所有长度尺度同时出现，使物理量（如相干长度、比热等）出现奇异状态．它使得标准的微扰论方法不再适用．

图 4.1(a)，4.2(a)，4.3(a)（都引自 H. Nishimor(2011)）是二维铁磁相变伊辛模型的蒙特卡洛方法的模拟结果，它们分别是 $T<T_c$，$T=T_c$ 和 $T>T_c$ 的情况．图中黑色区域代表自旋向上，白色区域代表自旋向下．

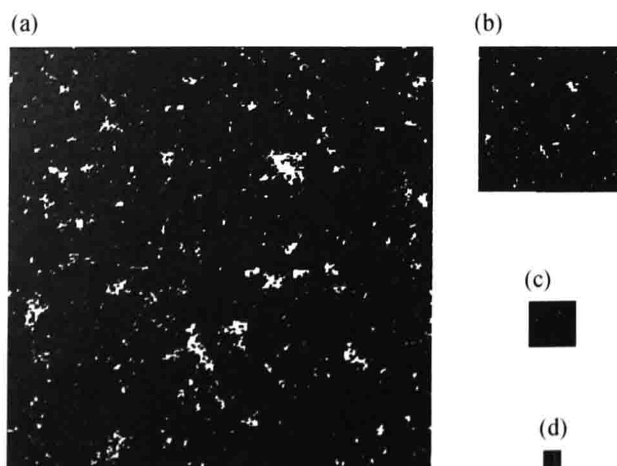


图 4.1　$T=0.95T_c$ 时伊辛模型的模拟及重正化群

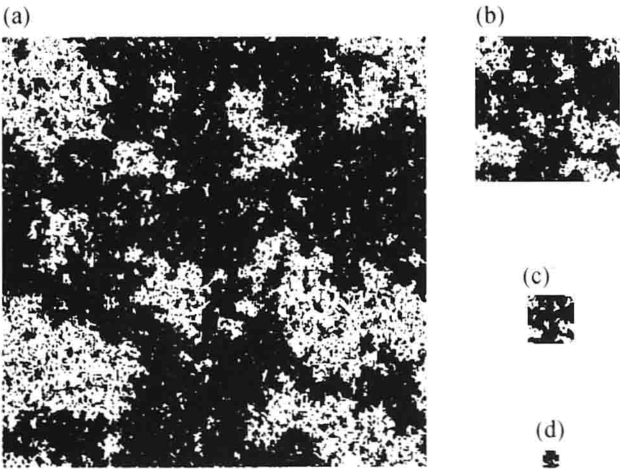


图 4.2　$T=T_c$ 时伊辛模型的模拟及重正化群

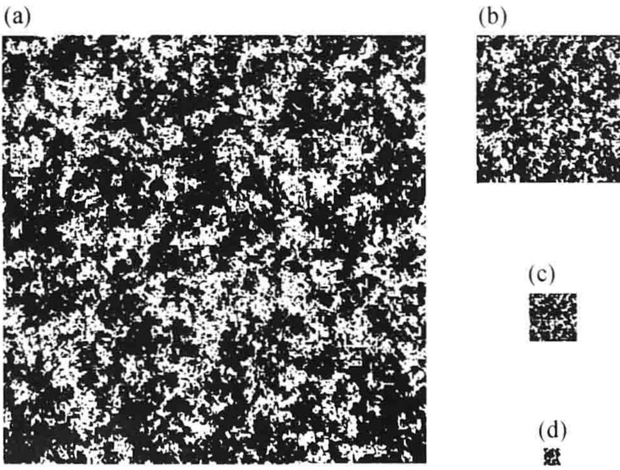


图 4.3　$T=1.05T_c$ 时伊辛模型的模拟及重正化群

从图 4.1(a)看出，当温度接近于临界温度 T_c 时，在整个 486×486 的方形区域中，向上的自旋占绝对优势，黑色从方形一边连到另一对边，形成较为磁化有序的状态，而向下的自旋(白色)仅仅是孤立的状态．重正化群变换是将 3×3 个集团按照“少数服从多数”的规则归并成一个集团，见图 4.4．这样逐步归并



图 4.4　集团归并的原则

成“自旋集团”的结果(见图 4.1(b),(c),(d))是图中的黑色愈来愈占优势,以至图 4.1(d)几乎全是黑色的. 这种尺度加大的“粗粒化”的结果,就是连续消除小尺度的涨落(白色),这样注意力就集中在接近临界点处的大尺度宏观系统的基本特点. 因此,重正化群的实质是通过重新标度形成自旋集团,逐步消去小尺度的涨落,并不改变整个的自旋配置.

但是当温度到达临界温度 T_c,即 $T=T_c$ 的图 4.2(a)的情况时,自旋向上的黑块只比自旋向下的白块稍稍占优势(或相反),而重新标度成“自旋集团”的图 4.2(b),(c)和(d)也没有看见 $T<T_c$ 的那种充满黑色(或白色)状态. 这是因为在临界点上存在从微观尺度到宏观尺度的所有尺度上的涨落,不可能通过重新标度而消除小尺度的涨落. 由于考虑所有尺度的影响,所以在临界点上重新标度后,关联长度仍是无穷大.

当温度超过临界温度,即 $T>T_c$ 时,经过少数几次重正化群变换以后,系统完全是一个随机的状态,见图 4.3(b),(c),(d). 这是高温时热涨落的结果. 此时关联长度只有数毫米到 1cm 左右. 因此,重正化群变换的实质是经过粗粒化以后,找出参数(如耦合常数)在重正化群变换前后之间的关系. 这种关系称为重正化群方程. 与关联长度为无穷大相应的重正化群方程的不动点就是临界点,它表示经过重正化群变换前后的状态不变量. 而与关联长度为零相应的不动点,则是平凡的不动点,它们表示比临界点温度高或低的情况.

§4.2　一维重正化群变换逾渗模型

我们在一条线的很多格点上放置导电的黑球和不导电的白球,为了研究导电的临界概率 p_c,我们将两个格点归并成一个小“集团”,见图 4.5. 这样小“集团”之间的距离就是原来格点之间距离的 $\lambda=2$ 倍. 这里归并的原则是,只要格点上有一个白球,归并以后的小“集团”就是白球. 这是很显然的,因为“集团”中有一个白球就不能导电,这是“一票否决”的归并原则. 类似地,两个小“集团”又可以组成较大“集团”,见图 4.5.

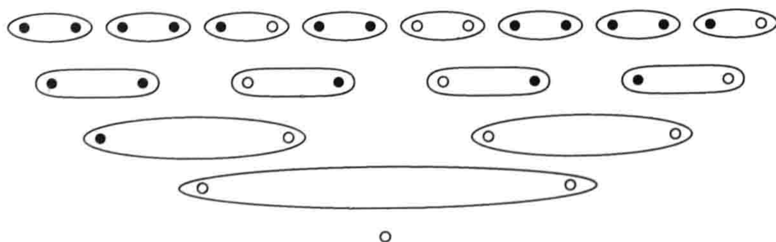


图 4.5　一维逾渗集团的归并

要使整个小“集团”导通,小“集团”中的每个格点必须导通(即黑球),因此小“集团”中黑球占据的概率 p'是小“集团”中每个格点占据概率 p 的乘积,即

$$p'=R(p)=p^{\lambda},\quad \lambda=2. \tag{4.1}$$

这是占据概率的重正化群变换. 这里我们忽略了格点的细节,即忽略了格点上哪个位置是白球,哪个位置是黑球,但是格点之间的相互关系和小“集团”之间的相互关系并没有改变.

重正化群变换(4.1)在取 $\lambda=2$ 时有两个不动点,它是曲线 $p'=R(p)$ 和直线 $p'=p$ 的交点,即使方程(4.1)左边等于右边的 p. 由(4.1)式求得有两个不动点:

$$p=0$$

和

$$p=1. \tag{4.2}$$

对不动点 $p=0$,(4.1)式右端函数 $R(p)$的导数 $R'(p)=2p=0<1$,所以它是稳定的不动点. 它表示只要初始的导通概率 $p_0<1$,那么它就不会导通,也就是说经过(4.1)式迭代它终于会收敛到 $p=0$. 在图 4.6 中,箭头表示由初始 p_0 迭代的过程,$p=0$ 相当于全是白球. 另外一个不动点 $p=1$,由于 $R'(p)=2p=2>1$,所以它是不稳定的不动点. 该不动点就是临界点即 $p=p_c=1$,相当于黑球完全占领格点. 正如第一章看到的,当占据概率达到临界点 p_c 时,各点被黑球占据概率的平均尺度 ξ 变成无穷大,这时不管用什么尺子去量,相干长度 ξ 都是无穷大. 重正化群变换以后,不但求出了临界点 $p_c=1$,而且说明它并未改变一维逾渗的本质.

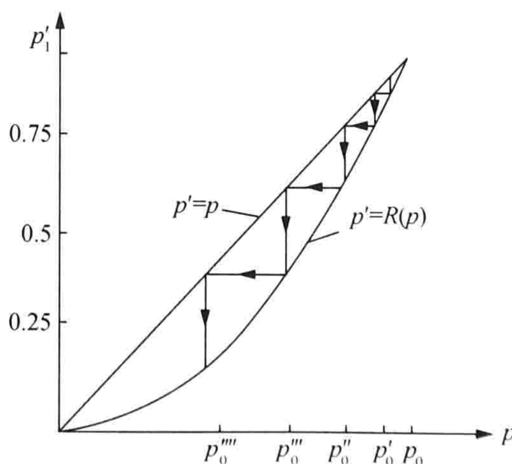


图 4.6 导通概率的重正化群变换

若小“集团”的尺度放大 $\lambda(\lambda=2)$倍,那么小“集团”的关联长度就缩短至 $1/\lambda$,即

$$\xi(p')=\frac{\xi(p)}{\lambda}. \tag{4.3}$$

(4.3)式是关联长度的尺度变换. 这是因为在最初 16 个格点上,5 个黑球在一起的数目有 1 个,4 个黑球在一起的数目有 1 个,2 个黑球在一起的数目有 1 个,所以黑球的平均尺寸是

$$\xi=\frac{5+4+2}{3}\approx 4.$$

而归并成一个小"集团"后,两个黑球在一起的数目有一个,一个黑球在一起的数目有两个,我们用黑球的数目加权,求得黑球的加权平均尺寸为

$$\xi=\frac{2^2+1^2+1^2}{3}=2.$$

小"集团"变成大"集团",一个黑球在一起的只有一个,所以平均尺寸为

$$\xi=\frac{1}{1}=1.$$

由图 4.6 看出,由于重正化使"集团"的尺寸放大了二倍,因而关联长度 ξ 就缩短了.

图 4.7 显示的是相干长度 ξ 随着占据概率 p 的变化图. 从变换(4.3)式看出,它的不动点有两个,分别是

$$\xi=0$$

和

$$\xi=\infty. \tag{4.4}$$

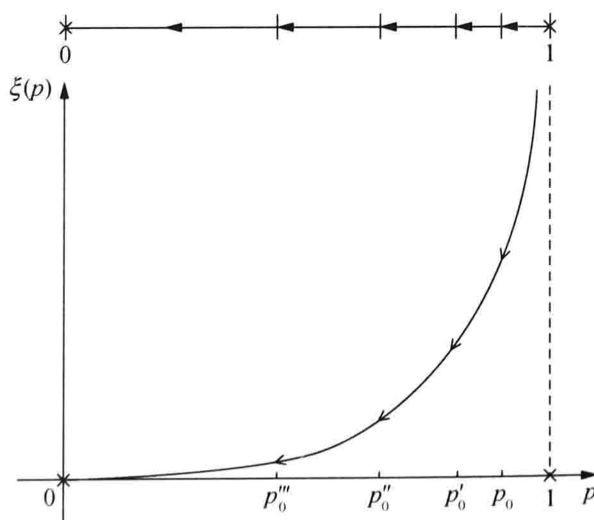


图 4.7 关联长度 ξ 随着占据概率 p 的变化

不动点 $\xi=0$ 是与重正化群变换(4.1)式稳定的不动点 $p=0$ 配合的,而不动点 $\xi=\infty$ 是与不稳定不动点 $p'=p_c=1$(即临界点)配合的. 图 4.7 中 $p_c=1$ 的垂直

虚线表示临界点位置，因此图 4.7 中的重正化群过程是从相干长度为无穷大（在 p_c 点）开始，随着相干长度的减小，逐步流向稳定的不动点 $p=0$ 所对应的 $\xi=0$ 的，见图 4.7 的上方.

因为关联长度 $\xi(p)$ 在临界点趋向于无穷大，即

$$\xi(p)=c\,|p-p_c|^{-\nu}, \tag{4.5}$$

其中 c 是常数，所以按(4.3)式，

$$\frac{\xi(p')}{\xi(p)}=\frac{1}{\lambda}=\frac{c\,|p'-p_c|^{-\nu}}{c\,|p-p_c|^{-\nu}}. \tag{4.6}$$

但是由(4.1)式，将 $R(p)$ 在 $p=p_c$ 处做泰勒展开，得到

$$\begin{aligned} p'&=R(p_c)+\left.\frac{\partial R}{\partial p}\right|_{p_c}(p-p_c) \\ &=p_c+\left.\frac{\partial R}{\partial p}\right|_{p_c}(p-p_c) \end{aligned}$$

或

$$\frac{p'-p_c}{p-p_c}=\left.\frac{\partial R}{\partial p}\right|_{p_c}. \tag{4.7}$$

将(4.7)式代入(4.6)式，得到

$$\frac{1}{\lambda}=\left(\left.\frac{\partial R}{\partial p}\right|_{p_c}\right)^{-\nu}. \tag{4.8}$$

由(4.8)式，求得临界指数

$$\nu=\frac{\ln\lambda}{\ln\left.\dfrac{\partial R}{\partial p}\right|_{p_c}}. \tag{4.9}$$

若取

$$\lambda=2,\quad \left.\frac{\partial R}{\partial p}\right|_{p_c}=\lambda p^{\lambda-1}\,|_{p_c}=2p\,|_{p_c}=2p_c=2,$$

则有

$$\nu=\frac{\ln2}{\ln2}=1,$$

即(4.5)式是

$$\xi(p)=c\,|p-p_c|^{-1}.$$

由(4.5)式，得标度方程为

$$\xi[\lambda(p-p_c)]=\lambda^{-\nu}\xi(p-p_c).$$

将 $\ln\xi$ 对 $p-p_c$ 微商，得

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}=-\nu\mathrm{d}\ln|p-p_c|$$

或

$$\frac{d\xi}{d\ln(p-p_c)}=-\nu\xi. \tag{4.10}$$

(4.10)式是和尺度微分方程(3.97)相同的方程.

由一维逾渗重正化群变换我们看出,由于在临界点 p_c 上,关联长度 ξ 是无穷大,因而虽然在重正化群变换后尺度加大了,没有考虑小尺度上的细致情况,但是相变点 p_c 上的性质并不改变.

重正化群变换最重要的是找出这种变换的不动点. 相变点一定是不稳定的不动点,在逾渗中它相当于临界的占据概率. 在临界点处存在自相似结构.

§4.3　二维重正化群变换逾渗模型

在一维逾渗的重正化模型中,我们将格点归并成小"集团"的原则是一票否决制,即格子点中只要有一个是白球就不能导通. 对二维逾渗来讲,以图 4.8 为例,它共有 16×16=256 个格点. 若将 4 个格点归并成一个小"集团",它有 16 种可能的配置,见图 4.9.

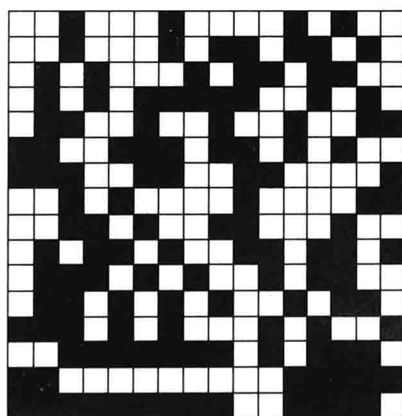


图 4.8　由 16×16=256 个格点组成的逾渗集团

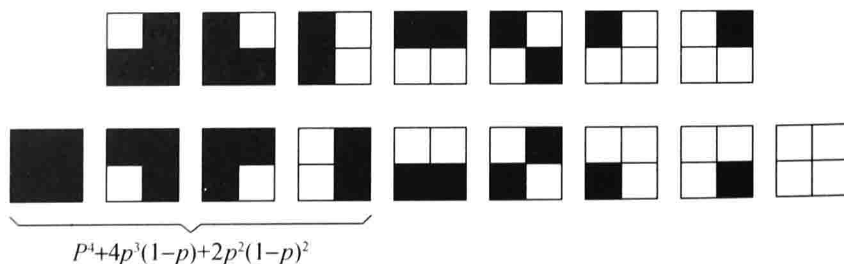


图 4.9　四个格点合并成一个小"集团"的 16 种配置

若归并规则是一票否决,那么图 4.9 的 16 种配置中仅有 1 种即 4 个全是黑球的格点才能导通,这就太苛刻了. 若考虑逾渗是在垂直方向从上向下的,那

么前 7 种配置中(用大括号标记的)有 1 个或 2 个白球仍然是可以导通的. 16 种中只有后面 9 种是不导通的. 所以这里归并的原则基本上属于“少数服从多数”,说“基本”是由于若 4 个格点上有 2 个白球,2 个黑球,仅当 2 个黑球属于相连的垂直方向时,才是导通的.

设格点占据黑球的概率是 p,那么格点不占据黑球的概率就是 $1-p$. 在图 4.9 前 7 种配置中,有 1 个是 4 个格点都充满黑球,因此它占据的概率为 $1\cdot p^4$,有 4 个是 3 个格点被黑球占据,它占据的概率为 $4p^3(1-p)$. 还有 2 个是 2 个格点被黑球占据,它占据的概率是 $2p^2(1-p)^2$. 把这 7 种概率相加就是小“集团”占据的概率

$$R(p)=p^4+4p^3(1-p)+2p^2(1-p)^2. \tag{4.11}$$

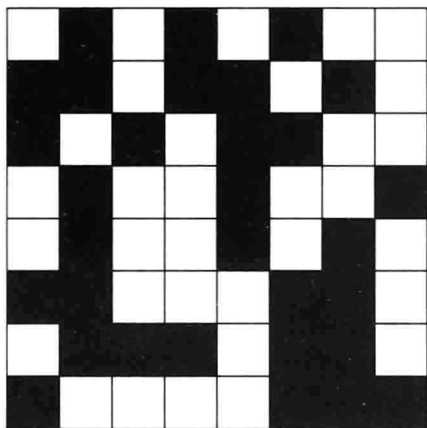


图 4.10 256 个格点集团重正化成 64 个小“集团”

这样,图 4.8 的 256 个格点,经过 $\lambda=2$ 的重正化就变成 $8\times8=64$ 个小“集团”,见图 4.10. 这种重正化的过程,每四个格点的小方块的自由度从 2×2 减少到 1,且微观状态数由 $2^{2\times2}=16$ 减少到 $2^1=2$,因此 256 个格点的自由度减少到 $256/4=64$ 个,微观状态数则由 2^{256} 减少到 2^{64}.

自由度和微观状态数虽然减少了,但是和一维时一样,临界状态相干长度是无穷大这一特征并不改变,因此占据概率的重正化群变换为

$$\begin{aligned}p'=R(p)&=p^4+4p^3(1-p)+2p^2(1-p)^2\\&=2p^2-p^4.\end{aligned} \tag{4.12}$$

在$(p,R(p))$图上,$R(p)=p$ 的直线(虚线)和 $R(p)=2p^2-p^4$ 的曲线(实线)的交点就是重正化群变换(4.12)的不动点,令(4.12)式左边等于右边也可求得,即

$$p=2p^2-p^4,$$

或写成

$$p(p-1)(p^2+p-1)=0. \tag{4.13}$$

因此,不动点有三个,分别是

$$p=0,\quad p=1,\quad p=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \tag{4.14}$$

见图 4.11.

$p=0$ 和 $p=1$ 这两个不动点是稳定的不动点,它们都有 $\left|\frac{\partial R}{\partial p}\right|<1$,其中 $p=0$ 表示完全被白球占领,$p=1$ 表示完全被黑球占领. 它们都相应于关联长度变换(4.3)的不动点 $\xi=0$,因而是平凡的不动点. 不动点 $p=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx0.618$ 是

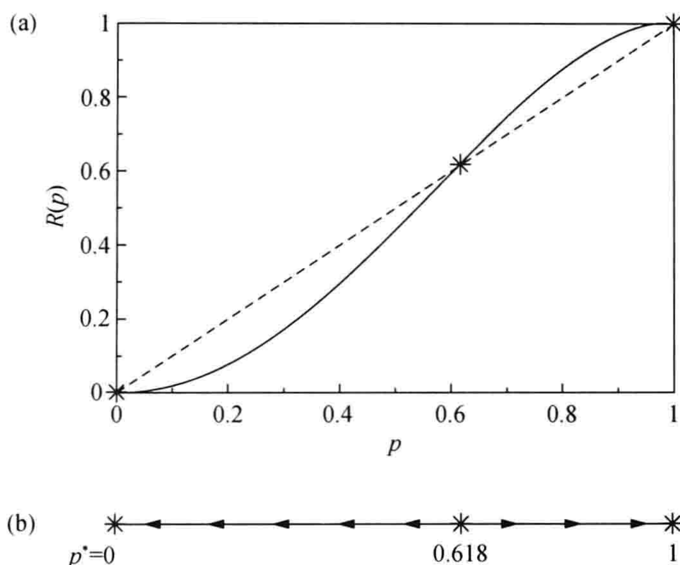


图 4.11 重正化群变换(4.12)式的不动点(a)及其相应的流(b)

不稳定的不动点,此时 $\left|\dfrac{\partial R}{\partial p}\right|=4p-4p^3\approx1.528>1$,就是二维逾渗的临界概率 p_c,对应相干长度变换(4.3)的另一个非平凡的不动点 $\xi=\infty$.

图 4.12 显示的是相干长度 ξ 随着重正化和占据概率的变化. 从图 4.12 看出,重正化后相干长度不断减小,从 $\xi=\infty$ 处分两边流向 $\xi=0$,即从临界 p_c 分两边流向 $p=0$(初始 $p<p_c$)和 $p=1$(初始 $p>p_c$).

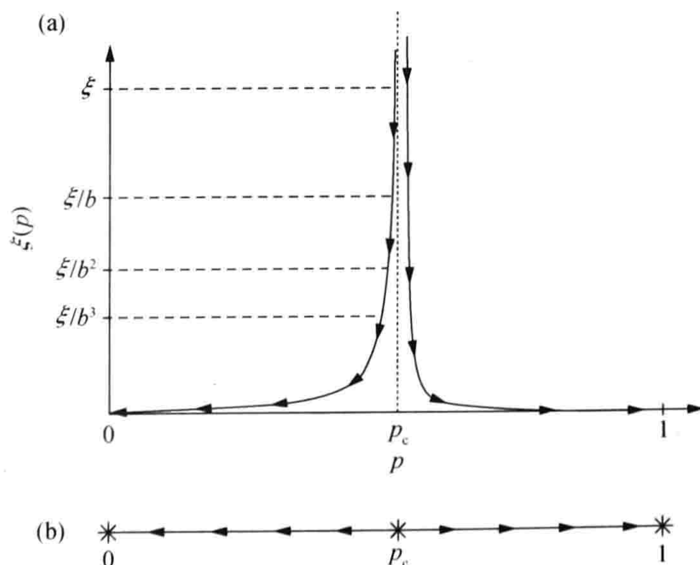


图 4.12 二维逾渗重正化后的相干长度 ξ 随占据概率 p 的变化(a)以及相应的流(b)

和一维时类似，由(4.9)式可求得相干长度的临界指数

$$\nu'=\frac{\ln\lambda}{\ln\frac{\partial R}{\partial p}\Big|_{p_c}}=\frac{\ln 2}{\ln\left[4(p-p^3)\big|_{p_c=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right]}=\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$=\frac{\ln 2}{2\ln(\sqrt{5}-1)}\approx 1.635. \tag{4.15}$$

利用重正化群变换又一次求出了临界指数.

图 4.13 是 9 个方格点归并成一个小“集团”的重正化图，小“集团”之间的尺度是格点之间的尺度的 $\lambda=3$ 倍，归并的规则用“少数服从多数”. 可以证明，重正化群变换为

$$p'=R(p)=3p^3+3p^4-2p^5-15p^6+18p^7-7p^8+p^9. \tag{4.16}$$

利用(4.16)式，求得的临界概率 $p_c\approx 0.609$.

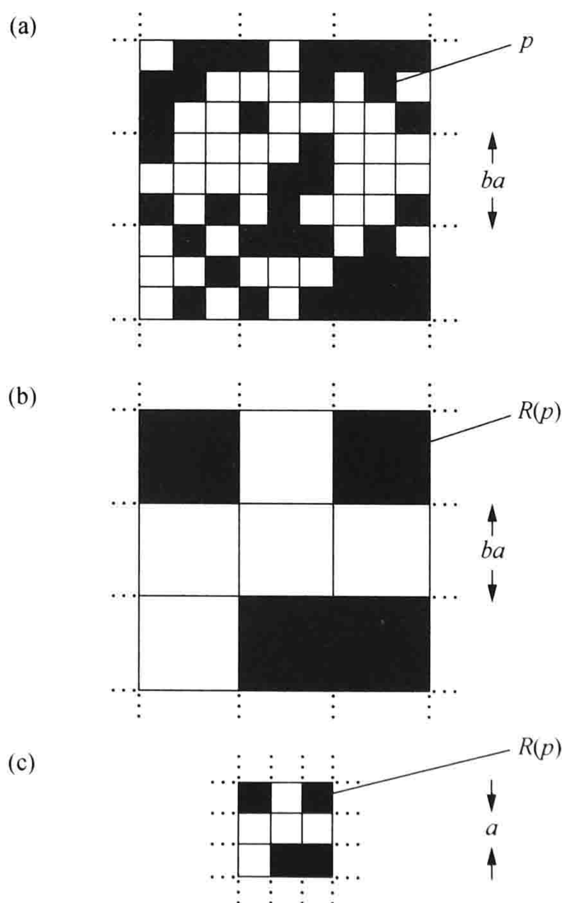


图 4.13　9 个方格点归并成一个小“集团”

类似地，对于六角形格子(见图 4.14)，我们将 3 个小格子归并成一个小“集团”，即尺度是原来的 $\lambda=\sqrt{3}$ 倍，此时 3 个六角形的配置可以有 8 种，见图 4.15.

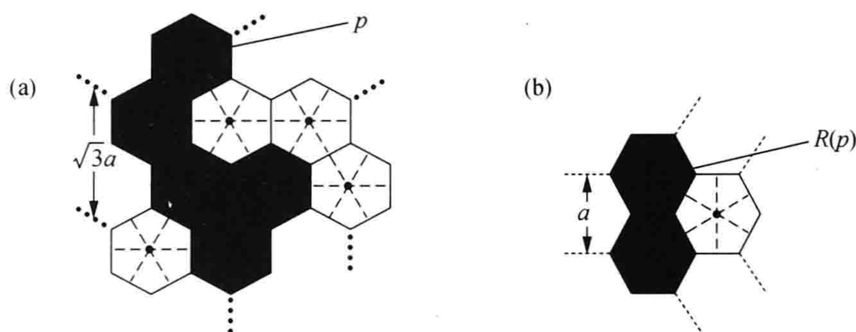


图 4.14 二维六角形格子的重正化群变换

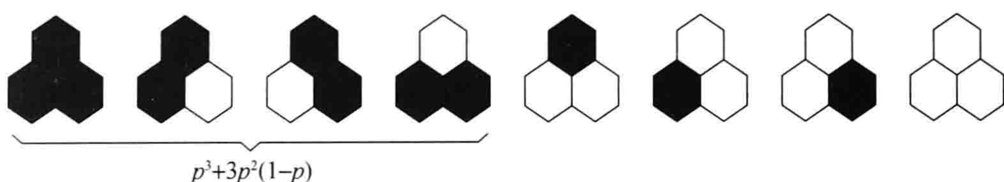


图 4.15 3 个六角形黑球占据的 8 种可能配置

图 4.15 的前 4 种配置都是可以导通的,其中第一种 3 个六角形全占据,后 3 种 2 个六角形占据,1 个六角形未占据,所以重正化群变换为

$$p'=R(p)=p^3+3p^2(1-p)=3p^2-2p^3. \tag{4.17}$$

由(4.17)式左右两边相等,得

$$p=3p^2=2p^3. \tag{4.18}$$

由(4.18)式,求得 3 个不动点为(图 4.16)

$$p=0,\quad p=1,\quad p=\frac{1}{2}, \tag{4.19}$$

其中 $p=0$ 和 $p=1$ 是稳定不动点,它们对应于相干长度 $\xi=0$,$p=\frac{1}{2}$是不稳定不动点,它就是临界概率 p_c,对应于相干长度 $\xi=\infty$. 因

$$\left.\frac{\partial R}{\partial p}\right|_{p_c}=(6p-6p^2)\,|_{p_c=\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}, \tag{4.20}$$

故临界指数为

$$\nu=\frac{\ln\sqrt{3}}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}\approx 1.355. \tag{4.21}$$

这两节所讨论的多个逾渗的例子均说明,可以通过重正化群方法求出临界指数.

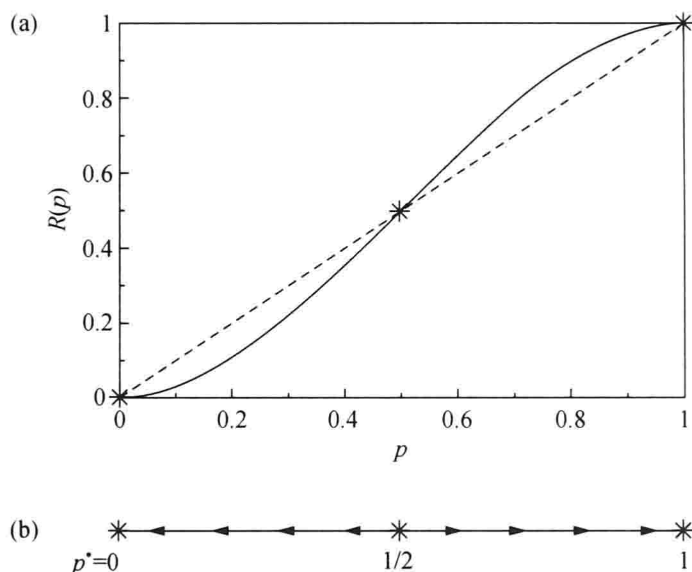


图 4.16　3个六角形归并成1个六角形重正化群变换的不动点(a)以及其相应的流(b)

§4.4　一维伊辛模型的重正化群

在一维伊辛模型描述的铁磁相变中,微观状态用自旋(spin)S_i来描述. 自旋只有两种状态,向上或者向下,向上对应自旋 $S_i=+1$,向下对应自旋 $S_i=-1$.

由于微观状态是随机的,一般要用统计上的概率密度或它的傅里叶变换特征函数来做平均统计. 在统计物理上习惯用配分函数

$$Z(T)=\sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}} \tag{4.22}$$

作为特征函数,其中

$$E_i=\sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1} J \tag{4.23}$$

是所有自旋状态的互相作用能量,J 是相互作用能量,称为耦合常数,k 是玻尔兹曼(Boltzmann)常数.

令耦合常数 $K=\frac{J}{kT}$,则配分函数(4.22)可表示为

$$Z(T)=\sum e^{-KS_iS_{i+1}}. \tag{4.24}$$

原有的 N 个自旋,见图 4.17(a). 通过归并,两个自旋合并成一个,即 $\lambda=2$. 归并的方式是取原先两个格点中的奇数格点(如 1,3,5,7,…)上的自旋(这种方法叫部分格点消约法),见图 4.17(b). 这样格点数就由 N 变成 $N'=\frac{N}{2}$,那么配分

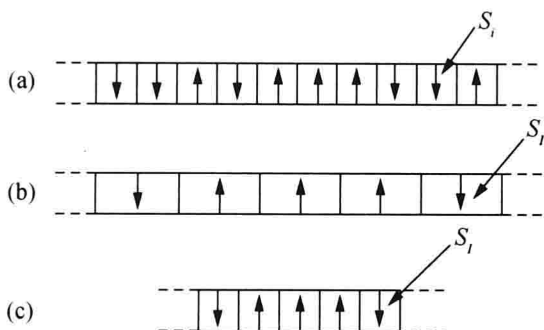


图 4.17 一维伊辛模型的重正化群变换格式

函数

$$Z(N,K)=\sum\cdots e^{K(S_1S_2+S_2S_3)}e^{K(S_2S_3+S_3S_4)}\cdots. \tag{4.25}$$

为了求重正化群变换后的配分函数,我们仅在原来偶数格点上求和,那么奇数格点就保存下来,因此(4.25)式变成

$$Z(N,K)=\sum\cdots[e^{K(S_1+S_3)}+e^{-K(S_1+S_3)}][e^{K(S_3+S_5)}+e^{-K(S_3+S_5)}]\cdots. \tag{4.26}$$

(4.26)式中求和号表示仅在图 4.17(a)中所有偶数格点上求和.

我们希望重正化以后的配分函数和原来的配分函数有相同的形式,也就是希望(4.26)式右端仍是(4.24)式右端的形式,因此设(4.26)式右端第一个因式

$$e^{K(S_1+S_3)}+e^{-K(S_1+S_3)}=c(K)e^{K'S_1S_3}. \tag{4.27}$$

若取 $S_1=S_3=1$,或 $S_1=S_2=-1$,则(4.27)式为

$$e^{2K}+e^{-2K}=c(K)e^{K'}. \tag{4.28}$$

若取 $S_1=1,S_3=-1$ 或 $S_1=-1,S_3=1$,则由(4.27)式,有

$$2=c(K)e^{-K'}$$

或

$$c(K)=2e^{K'},$$

则(4.28)式为

$$e^{2K}+e^{-2K}=2e^{2K'}$$

或

$$K'=R(K)=\frac{1}{2}\ln(\cosh 2K),$$

即

$$\cosh 2K=e^{2K'}. \tag{4.29}$$

因此,只要令

$$\tanh K'=(\tanh K)^2, \tag{4.30}$$

则由(4.29)式,有

$$\cosh 2K=\frac{1+\tanh^2 K}{1-\tanh^2 K}=\frac{1+\tanh K'}{1-\tanh K'}=e^{2K'}.$$

若(4.26)式右端的每一个因子均按(4.28)式处理,那么(4.26)式就可写成

$$Z(N,K)=c(K)^{\frac{N}{2}}\sum e^{K'(S_1S_3+S_3S_5+\cdots)}=c(K)^{\frac{N}{2}}Z(N'K'). \tag{4.31}$$

因此在重正化群变换(4.30)式下,(4.31)式右端的配分函数和原来的配分函数有相同的形式. (4.31)式中,

$$N'=\frac{N}{\lambda}=\frac{N}{2}. \tag{4.32}$$

图4.18是耦合常数重正化群变换(4.30)的图像. 从图上看出,重正化群变换(4.30)有两个不动点:

$$K=0,\quad K=\infty. \tag{4.33}$$

$K=0$ 是令(4.30)式左右两边都是零求得的,它是稳定的不动点. $K=\infty$ 是令(4.30)式左右两边都是1求得的,它是不稳定的不动点.

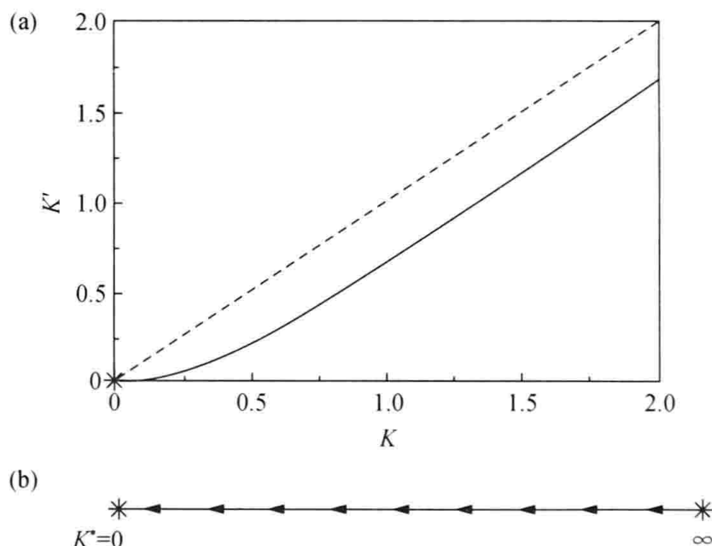


图4.18　重正化群变换(4.30)式的图像(a)及其相应的流(b)

$K=0$ 意味着 $J=0$,表示此时相邻自旋不存在物理耦合. 关联长度 ξ 的变换为

$$\xi'=\frac{\xi}{\lambda} \tag{4.34}$$

或

$$\xi(\tanh K)^2=\frac{1}{\lambda}\xi. \tag{4.35}$$

在 $K=0$ 附近,

$$\tanh K \approx K, \tag{4.36}$$

因此重正化群变换(4.30)式近似为

$$K' = K^2, \tag{4.37}$$

这样(4.35)式变成

$$\xi(K^2) = \frac{\xi(K)}{2}. \tag{4.38}$$

(4.38)式的解近似为

$$\xi(K) = \frac{A}{|\ln K|} \quad (K \ll 1), \tag{4.39}$$

其中 A 是常数.

由(4.39)式看出,因为 $K=0$, $|\ln K| \to \infty$,所以 $K=0$ 就相当于关联长度 $\xi = 0$.

另一个不动点 $K=\infty$ 是不稳定的不动点. 由(4.29),(4.30)式,有

$$e^{-2\tanh^2 K} \approx 2e^{-2K}, \tag{4.40}$$

两边取对数,得

$$-2\tanh^2 K = \ln 2 - 2K, \tag{4.41}$$

故

$$\tanh^2 K = K - \frac{\ln 2}{2}. \tag{4.42}$$

此时方程(4.35)的解为

$$\xi \approx A e^{2K}, \tag{4.43}$$

因为将(4.43)式代入(4.35)式左边,得

$$\text{左边} = A e^{2\left(K - \frac{\ln 2}{2}\right)} = A e^{2K - \ln 2} = A\,\frac{e^{2K}}{2} = \text{右边}. \tag{4.44}$$

这样不动点 $K=\infty$ 就对应于由(4.43)式确定的 $\xi=\infty$,即临界点.

二维或高维伊辛模型的重正化群方法一般比较复杂,下面只做概括性说明. 由(4.42)式看出,在 $K=\infty$ 的临界点处,一维情况可导得

$$K' = R(K) = K - \frac{\ln 2}{2}. \tag{4.45}$$

(4.45)式说明,在临界点处,重正化群变换后的自旋在临界点处总是以同样的状态向上(或向下). 对于二维伊辛模型,可由 9 个格点归并成一个"集团",见图 4.19. 现在尺度扩大 $\lambda=3$ 倍,二维归并后的小"集团",可以看成 3 个一维相邻的自旋相互作用. 因此 $K \to \infty$ 时,我们可以想象有

$$K' \approx \lambda K \quad (\lambda = 3). \tag{4.46}$$

将其推广到 d 维,则有

$$K' = R(K) \approx \lambda^{d-1} K \quad (\text{当 } K \to \infty). \tag{4.47}$$

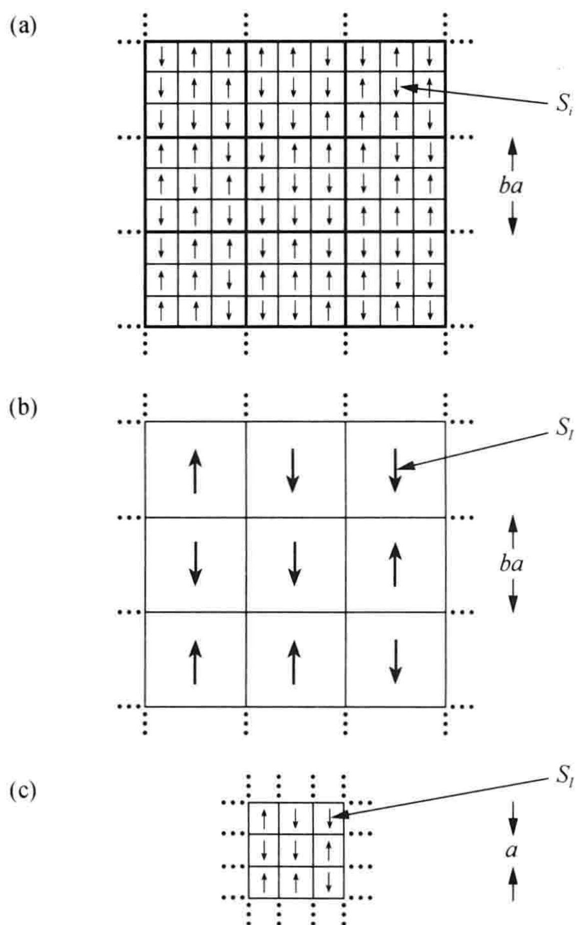


图 4.19 二维伊辛模型的重正化群变换

由于 $d>1$ 时 $\lambda^{d-1}>1$，所以

$$\frac{1}{K'}=\frac{1}{\lambda^{d-1}}\frac{1}{K}. \tag{4.48}$$

(4.48)式可以看成是 d 维重正化群变换模式.

(4.48)式的不动点是 $\frac{1}{K}=0$(即 $K=\infty$). 由于 $\frac{1}{\lambda^{d-1}}<1$，所以这个不动点是稳定的. 在高温时，铁磁体是顺磁相，此时重正化群的不动点也是稳定的，即 $K=0$ 也是重正化群变换的稳定不动点. 重正化群变换 $K'=R(K)$ 在两个稳定的不动点之间一定存在一个不稳定的不动点，它就是临界点 K_c. 图 4.20(a)是二维伊辛模型的重正化群变换，图中的 $K\approx0.507$ 就是 K_c.

知道了重正化群变换后，我们就可以求相干长度

$$\xi(K)\propto(K-K_c)^{-\nu} \tag{4.49}$$

的临界指数 ν. 由(4.49)式也会得到像(4.10)式那种形式的尺度微分方程. 当 $K-K_c$ 较小时，

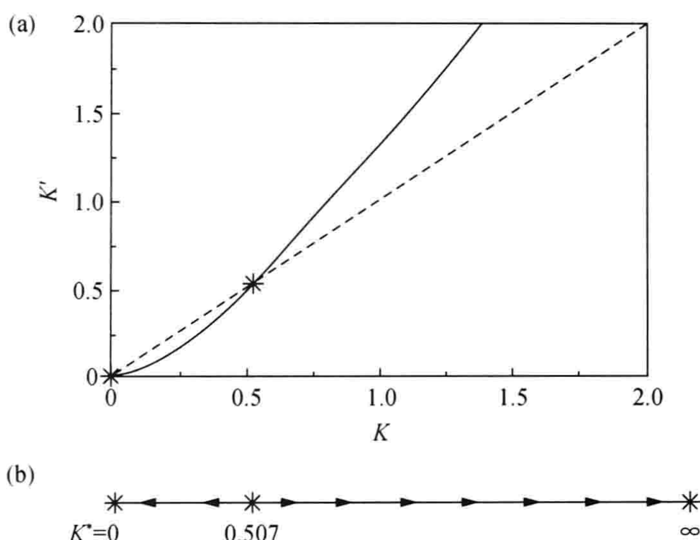


图 4.20 二维伊辛模型变换(4.48)式的图像(a)及其相应的流(b)

$$
\begin{aligned}
K' &= R(K_c) + \left.\frac{\partial R}{\partial K}\right|_{K_c} (K - K_c) \\
&= K_c + \left.\frac{\partial R}{\partial K}\right|_{K_c} (K - K_c).
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

和(4.49)式类似,

$$
\nu = \frac{\ln\lambda}{\ln\left.\frac{\partial R}{\partial K}\right|_{K_c}}. \tag{4.51}
$$

由于

$$
\xi[\lambda(K - K_c)] = \lambda^{-\nu}\xi(K - K_c), \tag{4.52}
$$

在(4.49)式中取对数后求微商,得到

$$
\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\nu \mathrm{d}\ln(K - K_c) \tag{4.53}
$$

或

$$
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\ln(K - K_c)} = -\nu\xi. \tag{4.54}
$$

(4.54)式就是伊辛模型的尺度微分方程.

§4.5 简单生长过程的重正化群

这是一种真实的自回避随机行走,它要尽可能回避它自己已经走过的格点,除非无其他路可走. 由于这种行走是连续的,因而它形成一种生长过程.

图 4.21(a)和(b)都是在二维格点上自回避的五步行走路径. 图中从 0 开始走,每一步上都标注了概率. 例如在 0 步,它有左、右、上、下 4 种可能的行走方向,向右走的概率是$\frac{1}{4}$. 向右走了一步后,它只能向左、上、下 3 种方向行走,所以概率是$\frac{1}{3}$. 到达图 4.21(a)中 A 点后,它只能向上或向左行走,不能向下行走,所以由 A 点行走的概率是$\frac{1}{2}$. 重正化群变换是将 4 个格点归并成 1 个格点,见图 4.22. 这里格点之间距离放大 $\lambda=2$ 倍.

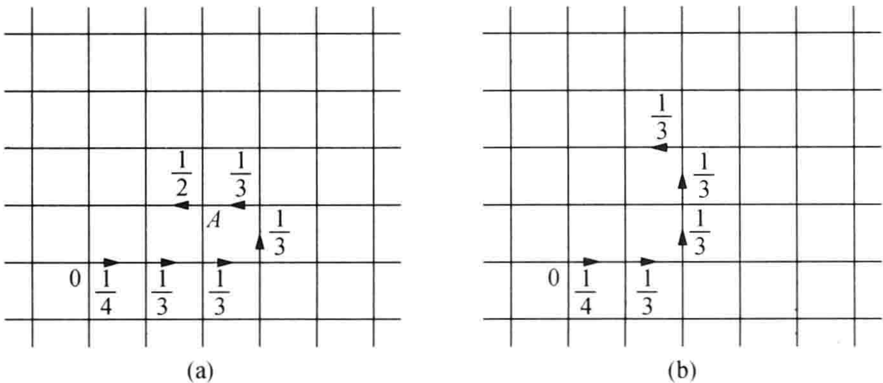


图 4.21　二维五步自回避行走

现在求重正化前后的易逸度(fugacity)K 和 K'的关系. 为此我们有两条规定:

(1) 行走以格点的左下角开始;

(2) 行走限制在 4 个格点内,直至格点上方走出格点.

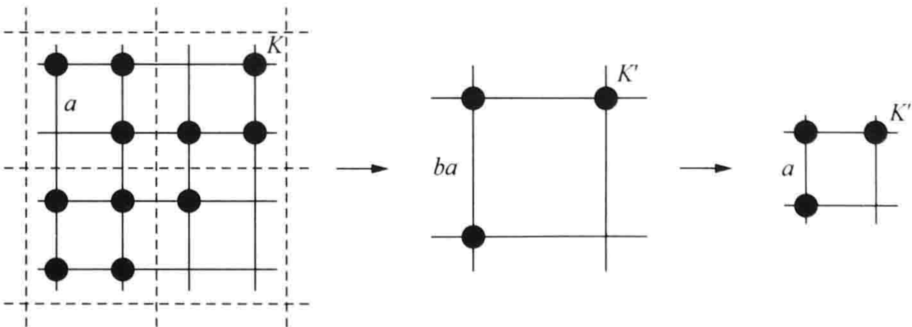


图 4.22　4 个格点(实线)归并成 1 个格点

对 4 个格点,从左下角开始,按照上述两条规定,共有 4 种行走路径,见图 4.23. 从左下角开始的 4 种路线,重正化后归并成 1 个格点的 1 条路径,那么重正化群方程为

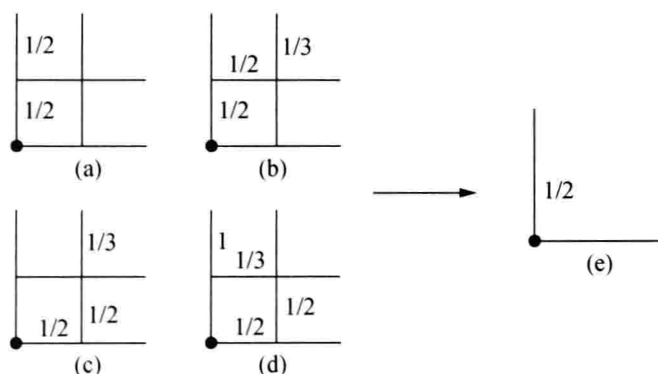


图 4.23　4 个格点重正化成 1 个格点

$$\frac{1}{2}K' = \left(\frac{1}{2}K\right)^2 + \left(\frac{1}{2}K\right)^2\left(\frac{1}{3}K\right) + \left(\frac{1}{2}K\right)^2\left(\frac{1}{3}K\right) + \left(\frac{1}{2}K\right)^2\left(\frac{1}{3}K\right)(K) = \frac{1}{4}K^2 + \frac{1}{6}K^3 + \frac{1}{12}K^4 \tag{4.55}$$

或

$$K' = R(K) = \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{3}K^3 + \frac{1}{6}K^4. \tag{4.56}$$

令(4.56)左右两边相等，求得三个不动点

$$K=0,\quad K=1\quad 和\quad K=\infty. \tag{4.57}$$

$K=0$ 和 $K=\infty$ 是稳定的不动点，而 $K=K_c=1$ 是不稳定的不动点，即临界点 K_c. 将(4.56)式在临界点 K_c 附近泰勒展开，得

$$K' = R(K_c) + \left(K + K^2 + \frac{2}{3}K^3\right)_{K_c=1}(K-K_c) = K_c + \frac{8}{3}(K-K_c). \tag{4.58}$$

由(4.49)和(4.50)式，得到

$$\frac{\xi(K')}{\xi(K)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{(K'-K_c)^{-\nu}}{(K-K_c)^{-\nu}} = \left(\frac{\partial R}{\partial K}\bigg|_{K_c}\right)^{-\nu},$$

因而临界指数

$$\nu = \frac{\ln\lambda}{\ln\left(\frac{\partial R}{\partial K}\right)\bigg|_{K_c}} = \frac{\ln 2}{\ln\frac{8}{3}} \approx 0.707. \tag{4.59}$$

由于 N 个粒子的平均位移为

$$r=\frac{\sum_N N^{\nu}K^N}{\sum_N K^N}\propto N^{\nu}$$

或

$$N\propto r^{\frac{1}{\nu}}, \tag{4.60}$$

若每个粒子的质量为1,则 N 代表总质量,那么(4.60)式就表示质量和尺寸的关系 $N\propto r^D$,即

$$\nu=\frac{1}{D}, \tag{4.61}$$

D 是分数维. 将(4.59)式代入(4.61)式,求得分数维

$$D\approx 1.415. \tag{4.62}$$

§4.6 相变和分岔

前面谈到了用重正化群方法研究二阶相变临界指数等,从这节起我们将非连续的一阶相变和连续的二阶相变和分岔、突变相联系,使得我们更好地理解重正化群方法.

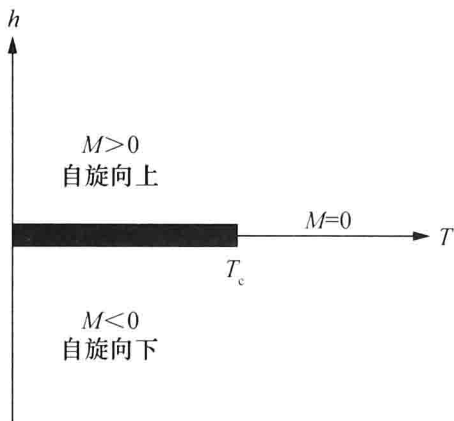


图 4.24 伊辛模型的相图

从物理上讲,水在100℃沸腾时变成气体,但是气态的密度远小于液态. 若用沸腾水的密度 ρ_w 和热气体的密度 ρ_a 作为序参数,由于一阶相变的上方(水蒸气)和下方(热水)的密度是不相同的,那么一阶相变的两边的序参数是不连续的. 同样,在铁磁相变中,磁化强度 M 就是一个序参数,在相变线的上方磁化强度 $M>0$,表示自旋向上,而在下方,磁化强度 $M<0$,表示自旋向下,见图 4.24. 对于连续的二阶相变,如加热磁铁,当它达到用居里温度 T_c 表示的临界点时,会慢慢失去磁性. 类似地,在沸腾的水中,当温度由低升高到 T_c 时,水蒸气和水的密度差别会慢慢消失. 在临界温度 T_c 以上,不存在气态和液态的区别.

二阶相变具有如下的两点性质:

(1) 两个相具有不同的对称性;

(2) 在临界点上两个相没有区别.

这两点性质正好和下列方程

$$\dot{x}=x(-b-x^2) \tag{4.63}$$

所表述的叉式分岔或霍普夫(Hopf)分岔相对应，见图 4.25. 若序参量 x 代表直角坐标系变量，则是叉式分岔，若 x 代表极坐标变量 r，则是霍普夫分岔.

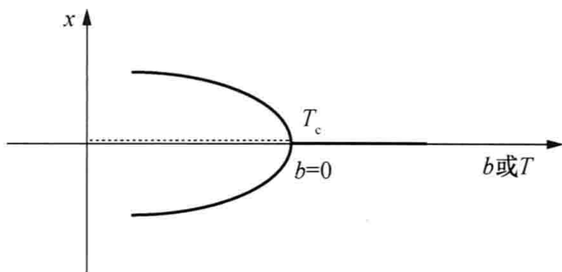


图 4.25　叉式分岔或霍普夫分岔

当 $b<0$，(4.63)式存在两个稳定定常解(令(4.63)式右端为零)

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-b} \tag{4.64}$$

(或 $r_{1,2}=\pm\sqrt{-b}$)，而另一定常解 $x=0$ 是不稳定的(图中虚线).

由于(4.64)的两个解($b<0$)使得时间对称性破坏，在不同时刻系统占据的状态不再相同，在临界点 $b=0$(或 $T=T_c$)这两个相一致，而在 $b>0$ 定常状态 $x=0$ 是稳定的. 从信息的观点看，对称性的破坏可以使产生扰动源的信息传递到接收器，使对称性增加.

§ 4.7　相变和突变

为了将相变和突变联系起来，我们来看气液相变的范德瓦尔斯状态方程

$$\left(p+\frac{\alpha}{V^2}\right)(V-\beta)=RT, \tag{4.65}$$

其中 p 为压强，V 是摩尔体积，T 是温度，R 是气体常数，α,β 为该气体的两个特征参数. p_c,V_c,T_c 为临界点，且

$$p_c=\frac{\alpha}{27\beta^2},\quad V_c=3\beta,\quad T_c=\frac{8\alpha}{27R\beta}. \tag{4.66}$$

很容易将方程(4.65)化成如下形式：

$$x^3+bx+a=0, \tag{4.67}$$

其中

$$\begin{aligned} x&=\frac{V_c}{V}-1,\\ a&=\frac{8\left(\frac{T}{T_c}-1\right)-2\left(\frac{p}{p_c}-1\right)}{3},\\ b&=\frac{8\left(\frac{T}{T_c}-1\right)+\left(\frac{p}{p_c}-1\right)}{3}. \end{aligned} \tag{4.68}$$

(4.67)式只是反映出序参量 x 的平衡态满足的方程，若加上 x 随时间 t 的变化 $\dot{x}$，就成为一个动力学系统：

$$\dot{x}=-x^3-bx-a=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\tag{4.69}$$

其中(4.69)式的平衡态仍满足方程(4.67)式，φ 代表位势，

$$\varphi=\frac{x^4}{4}+\frac{b}{2}x^2+ax.\tag{4.70}$$

由(4.67)式得平衡态集合，见图4.26，它是一个曲面，称为尖拐突变的平衡态集合.

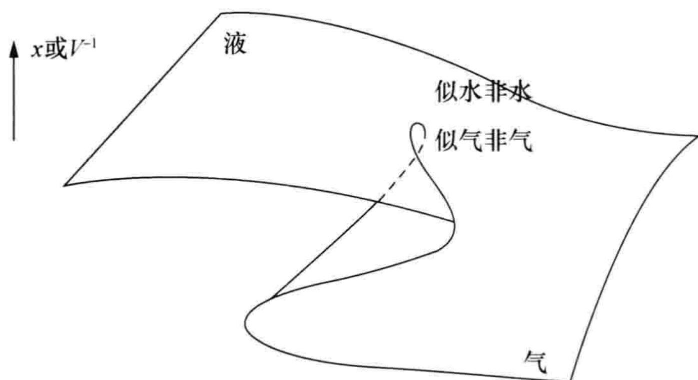


图4.26 尖拐突变的平衡态集合

从图4.26看出，该曲面的上支是液态，下支是气态. 上下分支的尖拐处是似水非水，似气非气的状态.

对于(4.67)式平衡态集合，我们分两种情况来讨论.

(1) 固定 b(例如为-3)，此时平衡态的集合(4.67)式变成

$$x^3-3x+a=0,\tag{4.71}$$

见图4.27. 由于平衡态 x 只和一个参数 a 有关，所以在(a,x)图上平衡态是一条曲线.

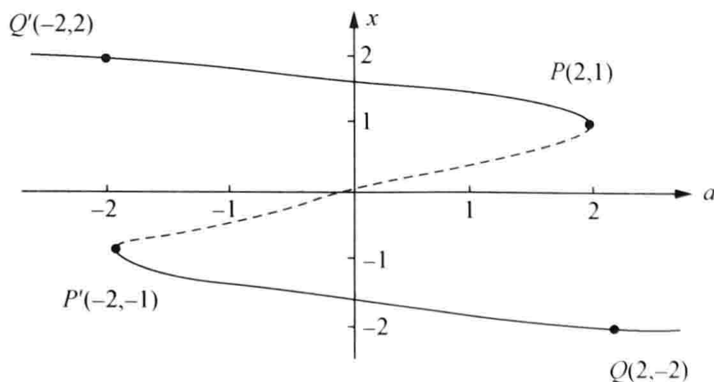


图4.27 (4.71)式的平衡态集合

在图 4.27 中平衡态满足(4.69)式，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x^3-3x+a=0, \tag{4.72}$$

另外位势 φ 的二阶导数为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=3(x^2-1), \tag{4.73}$$

所以在图 4.27 中的实线($|x|>1$)上，$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}>0$，因而是位势 φ 极小值，故是稳定的平衡态. 而在图 4.27 中的虚线($|x|<1$)上，$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}<0$，它表示位势 φ 的极大值，因而是不稳定的平衡态.

图 4.27 就反映出质点按运动方程(4.69)式演变的突变性. 当原来质点处在上支 Q' 点的左边时，位势 φ 只有一个极小值，见图 4.28(a)，但质点进入 Q' 点后，位势在 Q' 点上有一个极小值和一个拐点，见图 4.28(b)，一过了 Q' 点后，位势有两个极小值和一个极大值，见图 4.28(c)，但此时质点仍处在原来的那个极小值上. 随着 a 的加大，两个极小值从一小一大，逐步到两个一样小，一直到小的变大，大的变小，见图 4.28(c)，(d)，(e). 但是质点到达 P 点后，将 P 点坐标 $a=2$，$x=1$ 代入(4.72)，(4.73)式，得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \tag{4.74}$$

这意味着 P 点是一个拐点，即原来的极小值逐步抬高，变成了拐点，见图 4.28(f). 此时质点在位势的拐点上又无法停留，只好由 P 点突跳到位势的另一个极小值 Q 点，见图 4.28(g). 这就是为什么称(4.67)式为尖拐突变的原因.

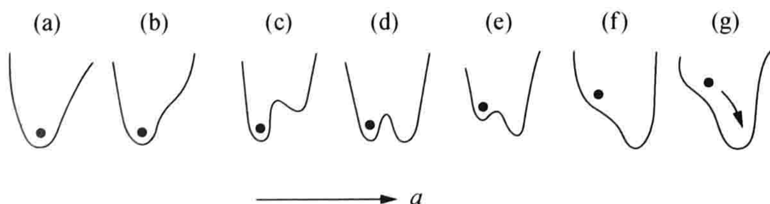


图 4.28　$b=-3$ 时位势(4.69)式随 a 的变化

质点由 Q 点逐步在图 4.27 下支向 P' 点前进，其位势 φ 随着 a 减小的方向变化，见图 4.29. 随着 a 的减小，位势 φ 由一个极小、一个拐点，逐步变成两个极小、一个极大，直到达到图 4.27 中 P' 点时，变成另一个极小和一个拐点，最后质点只好由图 4.27 下支中的 P' 点跳到上支的 Q' 点.

在图 4.27 上质点由 P 突变到 Q，和由 P' 突变到 Q' 发生在不同的位置，这称为突变的滞后性.

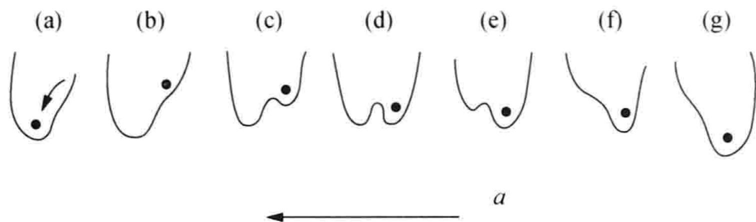


图 4.29 a 减小时质点突变的位置

(2)固定 a(例如取 $a=0$),则(4.69)式变成

$$\dot{x}=-x^3-bx=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{4.75}$$

(4.75)式和(4.63)式完全相同,这就是§4.6叉式分岔或霍普夫分岔的情况.

因此我们可以说,气-液相变的状态方程(4.67)式反映出状态的分岔和突变情况.

§4.8 突变和重正化群

在方程(4.69)式 a 和 b 都存在的情况下,突变点的集合按(4.74)式为$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$和$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0$,即

$$\begin{aligned} x^3+bx+a&=0,\\ 3x^2+b&=0. \end{aligned} \tag{4.76}$$

(4.76)式在参数(a,b)平面形成一个由两条线和一个尖点 O 组成的集合,见图 4.30.

将(4.76)第二式解出 $x=\sqrt{\frac{-b}{3}}$,代入(4.76)第一式,得到

$$D=\frac{b^3}{27}+\frac{a^2}{4}=0. \tag{4.77}$$

D 就是三次方程 $x^3+bx+a=0$ 的根的判别式. 图 4.30 中的两条 $D=0$ 线代表三次方程有一个实根,两个重根. 图 4.30 的两条 $D=0$ 线将参数平面(a,b)分成两个区域:在两条 $D=0$ 线的外部 $D>0$,它表示三次方程(4.76)第一式的 x 有一个实根;在两条 $D=0$ 线的内部 $D<0$,表示有三个实根,位势 φ 有两个极小和一个极大. 这完全和图 4.27 对应.

物理学中的相变完全在图 4.30 中反映出来. 在 $D<0$ 区域的 $D=0$ 附近,由(4.76)式第二式解出一个 φ 的极小值的位置为

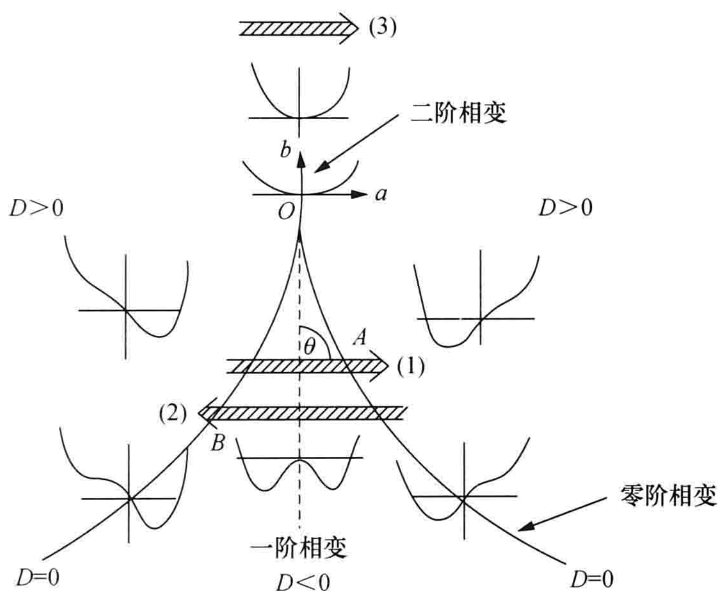


图 4.30 位势(4.70)式的曲面

$$x_1=\sqrt{\frac{-b}{3}}, \tag{4.78}$$

而通过 $D=0$ 到 $D>0$ 的另一拐点 φ 的极小值位置为

$$x_2=-2\sqrt{\frac{-b}{3}}. \tag{4.79}$$

将(4.78),(4.79)式代入(4.70)式,得

$$\varphi_1=\frac{b^2}{12},\quad \varphi_2=-\frac{2b^2}{3}. \tag{4.80}$$

(4.80)式说明,在 $D=0$ 线两边的位势不同,即位势本身不连续,因而 $D=0$ 线是位势的奇点线,这称为零阶相变.物理学上并无零阶相变.

物理学中的一阶相变发生在图 4.30 的 $D<0$ 区域的中心线(虚线)上,该线上 $a=0$,由(4.76)第一式看出,虚线的左右两边各有一个极小值:

$$x_1=\sqrt{-b},\quad x_2=-\sqrt{-b}, \tag{4.81}$$

但相应的位势 φ 由(4.70)式是 $-\frac{b^2}{4}$ 是连续的,因而位势是连续的. 但是从图 4.30 看出,虚线左边极小值位置逐步抬高,虚线右边极小值位置逐步降低(图 4.31 显示 $D<0$ 虚线左右两边的位势形态),因此位势 φ 的一阶导数不连续,这正是(4.63)式的情况,因而是一阶相变.



图 4.31 一阶相变左右的位势形态

而物理学中的二阶相变发生在图 4.30 虚线的尖点 O 处,即图 4.30 的似水

非水、似气非气的地方.

图 4.30 的虚线 O 点上方属于 $D>0$ 的区域,位势 φ 只有一个极值点,而在 O 点下方的 $D<0$ 的区域,位势 φ 有两个极小值 $x_1=\sqrt{-b}$ 和 $x_2=-\sqrt{-b}$,故 O 点的外部和内部位势 φ 分别为

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= 0 \quad (b \geqslant 0, a \to 0), \\ \varphi(b) &= -\frac{b^2}{4} \quad (b < 0, a \to 0). \end{aligned} \tag{4.82}$$

由(4.82)式看出,位势 φ 在 O 点附近($b=0$)是连续的,且 φ 的一阶导数也连续,而 O 点外部和内部的 φ 的二阶导数分别为 0 和 $-\frac{1}{2}$,不连续,因而是二阶相变.

总之,一阶、二阶相变都发生在位势 φ 的一阶导数或二阶导数不连续的地方,即奇点处,所以按第二章的说明,对应于一阶相变和二阶相变的尺度 r 的量分别为

$$\begin{aligned} r &= \frac{\varphi(x)}{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}} \to 0 \quad (\text{一阶相变}), \\ r &= \sqrt{\frac{\varphi(x)}{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}}} \to 0 \quad (\text{二阶相变}). \end{aligned} \tag{4.83}$$

尺度为零,无论重正化群变换如何收缩或放大都还是零,不能变成有限的非零数,因而相变和奇异性相联系,也必然和重正化群相联系. 由于动力学中分岔和突变都发生在奇点处,所以它们可称为动力学中的相变.

小　结

相变和临界现象中的重正化群方法,从分形角度看,是一种尺度变换,是粗粒化. 虽然它忽略了小尺度的细节,但由于在临界点处相干长度无穷大,这种忽略并不影响找到随尺度变化而不变的临界指数. 正是由于长程相关,在临界点处会产生相变的现象.

相变的临界点一定是重正化变换不稳定的不动点.

相变和分岔、突变有非常大的联系. 从相变的观点看,相干长度 $\xi\to\infty$,从分岔、突变的观点看,分岔和突变都发生了奇异性. 重正化群变换并不改变 $\xi\to\infty$ 的本质. 奇点的地方,尺度$\to 0$,也具有尺度不变性.

第五章　从布朗运动到列维运动

谈到随机运动，人们往往会想起布朗运动．布朗运动是悬浮在液体中的花粉做无规则的随机运动，它是分子与花粉颗粒间的随机碰撞所造成的．现在分形现象中常谈起另一种随机运动——列维运动．这两种随机运动有什么差别？简单说前者是有特征尺度运动，后者是无特征尺度运动，每步游动的距离可大可小，而且大小差别是跨量级的．图 5.1(a)，(b)分别是布朗运动和列维运动的轨迹．从图 5.1 看出，布朗运动每一步游动的距离都是差不多大小，而列维运动的游动距离则有大有小，差别甚至是量级上的．

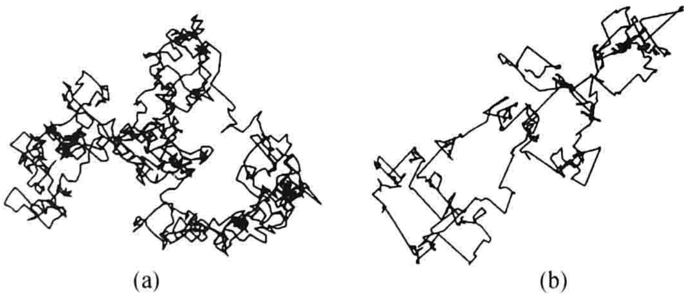


图 5.1　布朗运动(a)和列维运动(b)的轨迹

更重要的差别是，布朗运动的概率密度是正态分布，见(3.15)式，即大涨落的概率几乎为零．从概率论知道，对于正态分布，大于 2 个标准差$|2\sigma|$的概率仅为 4.45%，大于 3 个标准差$|3\sigma|$的概率仅为 0.3%，大于 5 个标准差$|5\sigma|$的概率为 5.7×10^{-7}．而列维运动的概率密度的尾巴比较长，即大涨落的概率虽小，但仍然有相当大的概率．本书中，我们会多次看到，这是长程相关和长期记忆性的表现．

§5.1　布朗运动的概率密度分布

随机游动是定义在格点上的随机过程，例如一个游动者在二维($d=2$)的格子上游动，每一时间间隔都以相同的概率游动到其邻近的位置．图 5.2 是简单的二维随机游动轨迹，每一时间间隔游动者游动了一个单位间隔，共游动了 10 个时间间隔，得到了三种不同的游动轨迹．图中数字代表游动的顺序，箭头代表游动的方向，那么游动 n 步以后的净位移为

$$\boldsymbol{r}(n) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i, \tag{5.1}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 步指向最邻近位置的单位向量.

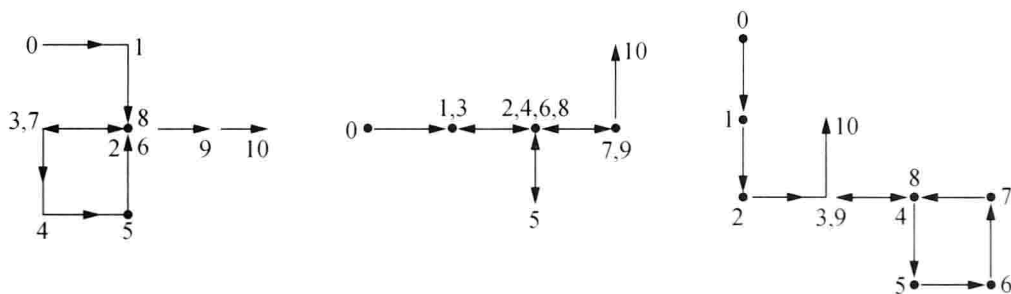


图 5.2 二维格子上简单随机游动的不同轨迹

因为 $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \boldsymbol{0}$,所以平均位移

$$\langle \boldsymbol{r}(n) \rangle = \boldsymbol{0}. \tag{5.2}$$

另外,因为

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{5.3}$$

所以平均平方位移是

$$\langle r^2(n) \rangle = \langle \Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \Big)^2 \rangle = n + 2\sum_{i>j}^{n} \langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \rangle = n. \tag{5.4}$$

若每一步游动的时间间隔是 τ,那么 n 步游动的时间 $t = n\tau$,所以

$$\langle r^2(n) \rangle = \frac{t}{\tau}. \tag{5.5}$$

若设定格子间隔为 a,那么每一个格子点上游动的可能方向有 $2d$ 个(d 是格子的维数),单位时间内游动的方差为

$$K = \frac{a^2}{(2d)\tau}, \tag{5.6}$$

其中 K 称为扩散系数,它的单位是 $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. 因此,(5.5)式可以改写成

$$\sigma^2 = \langle r^2(n) \rangle = \frac{(2d)K}{a^2} t. \tag{5.7}$$

当 $a=1, d=1$ 时,

$$\sigma^2(t) = \langle r^2(n) \rangle = 2Kt. \tag{5.8}$$

(5.8)式就是布朗运动的(1.27)式.

若 $d=1$,均方位移 $\langle r^2(n) \rangle$ 就很容易由概率密度 $p(r,t)$ 算得,即

$$\langle x^2(t) \rangle = \int x^2 p(x,t) \mathrm{d}r. \tag{5.9}$$

若游到右边的概率为 $p=\frac{1}{2}$，则游到左边的概率就是 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，那么 t 时刻后游动 m 次到右边，$(t-m)$次到左边，位移是

$$x=m-(t-m)=2m-t, \tag{5.10}$$

因此 m 次到右边，$(t-m)$次到左边的概率是个别游动概率的乘积，位移的概率密度是二项式分布

$$p(m,t)=\binom{t}{m}p^m(1-p)^{t-m}, \tag{5.11}$$

其中 $\binom{t}{m}=\frac{t!}{m!\,(t-m)!}$是二项式展开系数.

由(5.10)式，得

$$m=\frac{1}{2}(x+t),\quad (t-m)=\frac{1}{2}(-x+t),$$

则(5.11)式可以写成

$$p(m,t)=\frac{t!}{m!\,(t-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{t-m},$$

又注意到

$$t!\approx(2\pi t)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)^t,$$

则

$$\begin{aligned}
p(m,t)&=\frac{\sqrt{2\pi t}t^t\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{2\pi m}m^m\mathrm{e}^{-m}\sqrt{2\pi(t-m)}(t-m)^{(t-m)}\mathrm{e}^{-(t-m)}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{(t-m)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{t}{m(t-m)}}\frac{t^{(t-m)}t^m}{m^m(t-m)^{(t-m)}}\mathrm{e}^{-t+m+(t-m)}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{(t-m)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{t}{m(t-m)}}\left(\frac{t}{2m}\right)^m\left(\frac{t}{2(t-m)}\right)^{t-m}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

将(5.12)式右端后两个因式取对数，得

$$\begin{aligned}
&\ln\left[\left(\frac{t}{2m}\right)^m\left(\frac{t}{2(t-m)}\right)^{t-m}\right]\\
&=-m\ln\left(\frac{2m}{t}\right)-(t-m)\ln\left(\frac{2(t-m)}{t}\right)\\
&=-\frac{1}{2}(x+t)\ln\left(\frac{x+t}{t}\right)-\frac{1}{2}(t-x)\ln\left(\frac{t-x}{t}\right)\\
&=-\frac{1}{2}(x+t)\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\frac{1}{2}(t-x)\ln\left(1-\frac{x}{t}\right)\\
&=-\frac{1}{2}(x+t)\left[\frac{x}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^2+\cdots\right]-\frac{1}{2}(t-x)\left[-\frac{x}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^2-\cdots\right].
\end{aligned}$$

若 $x \ll t$,则上式简化为$-\frac{x^2}{2t}$,故

$$\left(\frac{t}{2m}\right)^m\left(\frac{t}{2(t-m)}\right)^{t-m} \approx \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}},$$

而(5.12)式右端的因子

$$\sqrt{\frac{t}{m(t-m)}}=\sqrt{\frac{t}{\frac{1}{4}(t+x)(t-x)}}=\sqrt{\frac{4t}{t^2-x^2}} \approx \sqrt{\frac{4}{t}}=\frac{2}{\sqrt{t}},$$

因此(5.11)式就简化为

$$p(m,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{5.13}$$

这正是著名的正态分布.(5.13)式说明当游动次数或时间 t 大大超过游动位移 x 时,二项式分布就化为正态分布. 若考虑(5.10)式,得

$$p(m,t)\mathrm{d}m=p(x,t)\mathrm{d}x=2p(x,t)\mathrm{d}m,$$

则

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{5.14}$$

(5.14)式就是布朗运动的概率分布. 在(5.5),(5.6)和(5.9)式中取 $a=1,d=1,\tau=1$,则 $K=\frac{1}{2},\sigma^2=t$,那么(5.14)式可写成标准的正态分布

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.15}$$

(5.15)式说明,布朗运动的概率密度分布是指数函数形式的正态分布,而 $\sigma^2=t$ 正是布朗运动的方差.

§5.2 布朗运动下的扩散方程和自相关函数

在一维情况下,由于跳到左边或右边的概率都是$\frac{1}{2}$,那么 t 时刻在位置 i 处的概率为

$$p_i(t)=\frac{1}{2}p_{i+1}(t-\Delta t)+\frac{1}{2}p_{i-1}(t-\Delta t). \tag{5.16}$$

将(5.16)两边减去 $p_i(t-\Delta t)$,得到

$$p_i(t)-p_i(t-\Delta t)=\frac{1}{2}p_{i+1}(t-\Delta t)+\frac{1}{2}p_{i-1}(t-\Delta t)-p_i(t-\Delta t),$$

再两边除以 Δt,得到

$$\frac{p_i(t)-p_i(t-\Delta t)}{\Delta t}=\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{p_{i+1}(t-\Delta t)-2p_i(t-\Delta t)+p_{i-1}(t-\Delta t)}{(\Delta x)^2}.$$

当 $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$ 时，可导得扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{5.17}$$

其中

$$K = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \tag{5.18}$$

就是(5.6)式.

布朗运动的概率密度正态分布(5.14)式正是扩散方程(5.17)式的解.(5.17)称为福克-普朗克(Fokker-Planck)方程(简称 FP 方程).

在§1.4中我们知道，布朗运动(也称布朗噪声)的功率谱，由(1.11)式为

$$S(f) \propto f^{-2} \quad (\text{即 } \beta = 2). \tag{5.19}$$

功率谱 $S(f)$ 和自相关函数 $R(\tau)$ 互为傅里叶变换，

$$S(f) = \int_0^\infty R(\tau) \cos f\tau \, d\tau, \tag{5.20}$$

因此自相关系数

$$c(\tau) = \frac{R(\tau)}{\langle x^2 \rangle} = e^{-\frac{\tau}{T}} \tag{5.21}$$

的傅里叶变换为 $\frac{T}{1+f^2+T^2} \approx f^{-2}$，正是(5.19)式. $c(\tau)$ 是一个指数函数形式，参见(2.54)式. 由于 $\tau = T$ 时，相关系数 $c(\tau)$ 已衰减至 $\frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.7}$，所以一般称(5.21)为短程相关.

§ 5.3　自相似的随机过程

分形物体具有空间上的自相似性，而且在时间上更多表现为自相似的随机过程.

由布朗运动的均方位移(5.8)式看到，

$$\langle x^2(at) \rangle = 2K(at) = a \cdot 2Kt = a \langle x^2(t) \rangle. \tag{5.22}$$

(5.22)式说明 $x(at)$ 和 $x(t)$ 都服从相同的概率分布，即正态分布，因此用随机变量 x 本身来写意味着

$$x(at) \overset{d}{=} \sqrt{a} x(t). \tag{5.23}$$

(5.23)式说明 x 和 $x(at)$ 是自相似的随机过程. 等式中字母“d”表示左右两边在统计上是没有区别的. 图 5.3 是布朗运动的位置 x 随时间 t 变化的图像. 若 $a = 2$，即时间轴放大 2 倍(2 倍原来的间隔代表 1s)，则由(5.23)式，垂直轴会放大

$\sqrt{2}$倍. 图 5.3(a),(b),(c),(d)连续 4 张图就是连续取 $a=2$ 的结果. 这几张图说明,若将时间 t 重新标度后,随机过程是自相似的.

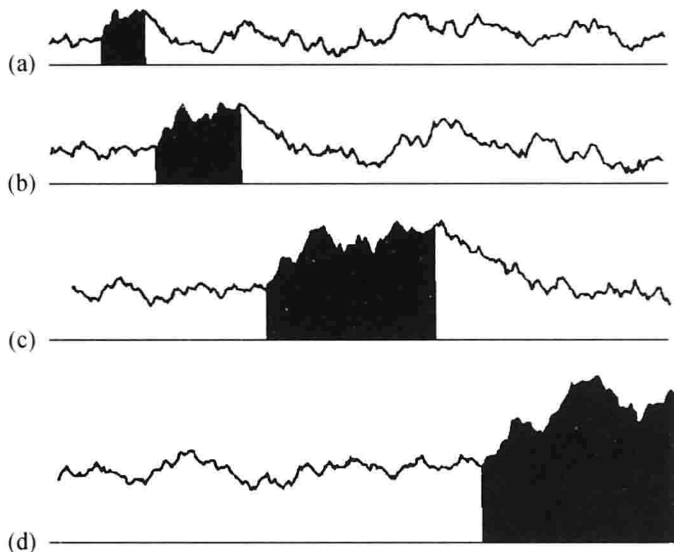


图 5.3 重新标度($a=2$)的布朗运动位置 x 随时间 t 的变化

我们将布朗运动推广:若存在一个正数 H 和一个随机过程 $x(t)$,$t\geqslant 0$ 对于点 x 和时间 t_0是 H 阶的自相似过程,则有

$$x(at)-x(at_0)\overset{\mathrm{d}}{=}a^H[x(t)-x(t_0)], \tag{5.24}$$

特别若取 $x_0=0, t_0=0$,(5.24)式的自相似过程可表示为

$$x(at)\overset{\mathrm{d}}{=}a^H x(t). \tag{5.25}$$

(5.24),(5.25)式中的 H 称为赫斯特指数. 对布朗运动来讲,由(5.23)看出,赫斯特指数

$$H=\frac{1}{2}, \tag{5.26}$$

因此说布朗运动是赫斯特指数为$\frac{1}{2}$的自相似随机过程.

当然,这里自相似的过程也包含了确定性的过程. 例如,自由落体从高度 $z_0=z(t_0)$处落下的距离为

$$z(t)-z_0=-g(t-t_0)^2, \tag{5.27}$$

因而

$$z(at)-z(at_0)=-g(at-at_0)^2=a^2[z(t)-z(t_0)],$$

显然赫斯特指数 $H=2$.

通常将 $0<H<1$ 的布朗运动称为分数维布朗运动.

下面我们来讨论分数维 D 和 H 之间的关系. 显然图 5.3 的曲线并不充满

二维空间，所以分数维 D 一定介于 1 和 2 之间．由于 $0<H<1$，所以可以猜测

$$D=2-H. \tag{5.28}$$

下面来说明(5.28)式的结果．

在(5.25)式中取 $a=2$，那么 $x(t)$ 和 $\frac{x(2t)}{2^H}$ 统计上是相同的．若区间 $t\in[0,1]$ 上的信号 $x(t)$ 用尺度 r 的小方块量出的个数是 N，那么用尺度为 $\frac{r}{2}$ 的小方块去量 $x(t)$，由于尺度缩小，则 $x(t)$ 在区间 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内的范围就相当于区间 $t\in[0,1]$ 内的 $\frac{1}{2^H}$ 倍(相当于从图 5.3(b)到图 5.3(a))，这样在 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内，以 $\frac{r}{2}$ 的尺度量出的小方块为 $2\cdot\frac{N}{2^H}$ 个．同样在另一半区间 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 也量出 $2\cdot\frac{N}{2^H}$ 个小方块．因此，在区间[0,1]上共量出 $2^{2-H}N$ 个小方块．一般用尺度为 $\frac{r}{2^k}$ 的小方块量出 $(2^{2-H})^kN$ 个，按(2.8)式，分数维 D 为

$$D=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln[(2^{2-H})^kN]}{\ln\frac{2^k}{r}}=2-H.$$

这就证明了分数维 D 和自相似过程的 H 之间的关系(5.28)式．

§ 5.4 分数维布朗运动

前面提到将布朗运动位移方差(5.8)式

$$\langle x^2\rangle\propto t \tag{5.29}$$

推广到

$$\langle x^2\rangle\propto t^{2H}, \tag{5.30}$$

就成为分数维布朗运动，它会带来什么实质上的变化呢？

从物理上知道，此时布朗运动所对应的自相关系数 $c(\tau)$ 为(5.21)式

$$c(\tau)=\frac{\langle x(T)x(T+\tau)\rangle}{\langle x^2(T)\rangle}=\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T}},$$

其中 T 是特征时间．前面已经说过，若 $\tau=T$，则相关系数已经衰减到 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，因此当 τ 更大时，相关系数就更小了．因而布朗运动称为短程相关．那么分数维布朗运动又如何呢？

因为自相关函数 $R(\tau)$ 的傅里叶变换就是功率谱

$$S(f)=\int_0^\infty R(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f\tau}\mathrm{d}\tau\propto f^{-\beta}, \tag{5.31}$$

其中 β 称为功率谱指数，$S(f)$表示单位频率的能量.（5.30）式中 t^{2H} 是能量的量纲，$fS(f)$也是能量的量纲，所以两者量纲相同，即

$$fS(f)=f\cdot f^{-\beta}=t^{2H}=\left(\frac{1}{f}\right)^{2H}=f^{-2H}.$$

由此得到功率谱指数 β 和赫斯特指数 H 之间的关系为

$$\beta=2H+1. \tag{5.32}$$

由（5.32）知，布朗运动（$H=\frac{1}{2}$）的功率谱指数是 $\beta=2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2$，而分数维布朗运动的所谓功率谱指数是 $2H+1$. 由 2 到 $2H+1$ 要经历什么样的过程呢？

我们首先看布朗运动和白噪声之间的关系，它们满足随机微分方程朗之万方程

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\varepsilon, \tag{5.33}$$

其中 B 表示布朗噪声，ε 表示白噪声. 因为白噪声的功率谱指数是 $\beta=0$，表示功率谱 $S(f)=f^0=$常数，而布朗运动 B 的功率谱指数是 $\beta=2$，所以（5.33）式说明微商一次以后，功率谱指数由 2 减小到 0. 反过来，也可以说白噪声积分一次就是布朗噪声，功率谱指数由 $\beta=0$ 增加到 $\beta=2$. 由于积分将小尺度的信号平滑掉，因此功率谱斜率向下倾斜了.

一般随机信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $\hat{x}(f)$可以写成

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ft}\mathrm{d}f. \tag{5.34}$$

将（5.34）式对时间 t 微商一次，得到

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}f)\hat{x}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ft}\mathrm{d}f. \tag{5.35}$$

由于功率谱是傅里叶变换系数模的平方，而 x 的功率谱由（5.34）式为

$$S(f)=|\hat{x}(f)|^2\propto f^{-\beta}, \tag{5.36}$$

微商一次后的功率谱由（5.35）式为

$$S(f)_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=|\mathrm{i}f\hat{x}(f)|^2=f^{-\beta+2}=f^{-(\beta-2)}, \tag{5.37}$$

所以微商一次后的功率谱指数则由 β 下降为 $\beta-2$. 同样，积分一次后的功率谱指数则由 β 上升到 $\beta+2$.

将上述结果推广到微商（或积分）次数是分数 α 的情况，那么微商 α 次（α 可以是分数）后的功率谱指数则由 β 下降为 $\beta-2\alpha$，即

$$\beta\xrightarrow{\text{微商}\,\alpha\,\text{次}}\beta-2\alpha. \tag{5.38}$$

反之，积分 α 次后的功率谱指数则由积分前的 β 增加到 $\beta+2\alpha$，即

$$\beta\xrightarrow{\alpha\,\text{次积分}}\beta+2\alpha. \tag{5.39}$$

现在我们要问:一个布朗运动(或布朗噪声)微商多少次后会变成分数维布朗噪声,即

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}B}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=FB,\quad \alpha=? \tag{5.40}$$

其中 FB 是分数维布朗运动噪声.

我们知道,布朗噪声 B 的功率谱指数是 2,它微商 α 次后的功率谱指数是 $\beta-2\alpha$,而分数维布朗运动的功率谱指数是 $2H+1$,两者相等得到

$$2-2\alpha=2H+1,$$

由此解出

$$\alpha=\frac{1}{2}-H. \tag{5.41}$$

(5.41)式说明,布朗运动只要进行$\left(\frac{1}{2}-H\right)$次的分数阶导数就可以得到分数维布朗运动. 显然,当 $H=\frac{1}{2}$时表示布朗运动不微商,即 FB 就是布朗运动的 B.

通常将(5.33)式改成

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}(FB)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\varepsilon,\quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{5.42}$$

那么分数维布朗运动 FB(或写成 B_{α})就可以用 ε 的 α 阶积分表示:

$$B_{\alpha}(t)=\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}\varepsilon}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{\varepsilon(u)\mathrm{d}u}{(t-u)^{1-\alpha}}.$$

上式右端符号"$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}\varepsilon}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}$"($\alpha>0$)及积分表达式称为分数阶微积分,在第十一章将详细说明. 因此,分数维布朗运动一定和分数阶导数和分数阶积分相联系. 而且可以证明,分数维布朗运动的自相关函数

$$R(\tau)\propto\tau^{2\alpha-1}$$

是一个幂函数,显然它表示长程相关,在第九章会有详细推导.

按照(5.38)式,若分数维布朗运动的功率谱指数为 β,则微商 α 次后的功率谱指数为 $\beta-2\alpha$,那么由(5.42)式就得到

$$\beta-2\alpha=2H+1-2\alpha=0,$$

即

$$\beta=2\alpha,\quad \alpha=H+\frac{1}{2}. \tag{5.43}$$

(5.43)式中的 α 表示分数维布朗运动,微商 $H+\frac{1}{2}$次就成为白噪声.

显然在(5.42)式和(5.43)式中,$\alpha=1$ 时,分数维布朗运动 B_{α} 就化成布朗运动,因此通常(5.42)式可以看成分数维布朗运动的分数阶导数表达式.

在(5.40)式中，由(5.42)看出，若 $0<H<\frac{1}{2}$，则 $\alpha>0$，(5.40)式就代表分数阶导数. 若 $\frac{1}{2}<H<1$，则 $\alpha<0$，(5.40)式就代表分数阶积分. 在第十一章我们将看到，分数阶导数和积分都存在一个幂函数形式的记忆函数，它们都比布朗运动本身有更强的记忆性，即未来的运动($t>t_0$)不但和现在 t_0 状态有关，而且和过去($t<t_0$) 的状态有关. 因此，分数维布朗运动将短程相关变为长程相关，并带有长记忆性.

在第八章中我们将介绍，均匀各向同性湍流在惯性区的功率谱指数为 $\beta=\frac{5}{3}$. 从(5.32)式得知，它对应的赫斯特指数 $H=\frac{1}{3}$. 因此从(5.41)式看出，将布朗运动微分

$$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

次，就得到湍流的信号.

图 5.4 和图 5.5 是赫斯特指数分别为 $H=0.2$ 和 $H=0.8$ 时依次重新标度的信号. 将图 5.4 和图 5.5 与布朗运动图 5.3 比较看出，$H=0.2$ 时的信号比布朗运动信号杂乱得多，而 $H=0.8$ 得信号比布朗运动信号光滑得多.

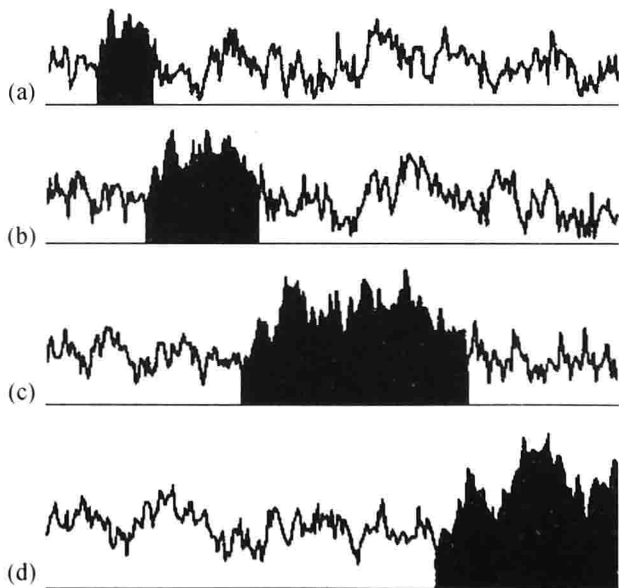


图 5.4　$H=0.2$ 时依次重新标度的信号

分数阶导数在自相似过程中随时都能碰到. 例如上节(5.25)式的解为

$$x(t)=x(1)t^{H}. \tag{5.44}$$

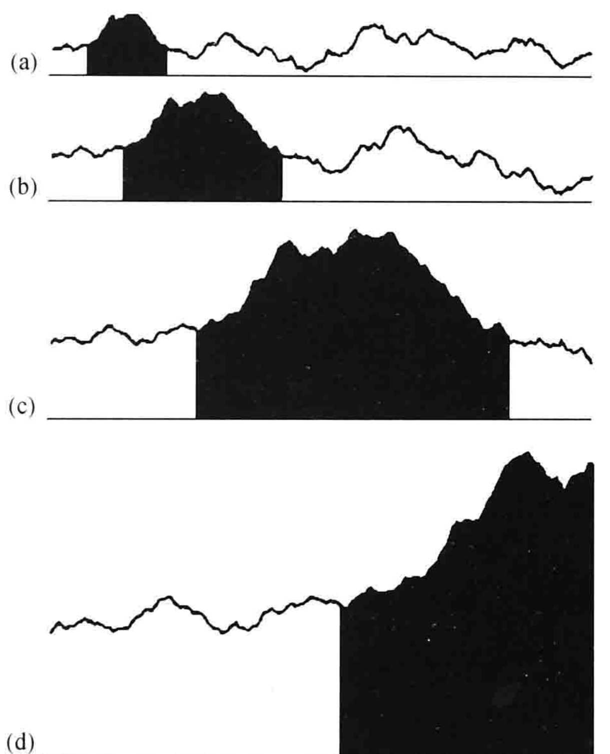


图 5.5　$H=0.8$ 时依次重新标度的信号

若 H 是整数,那么 H 阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^H x}{\mathrm{d}t^H}=H!x(1). \tag{5.45}$$

若 H 是分数,只要把阶乘换成 Γ 函数就是分数阶导数表达式,即

$$\frac{\mathrm{d}^H x}{\mathrm{d}t^H}=\Gamma(H+1)x(1). \tag{5.46}$$

自相似过程(5.25)或(5.44)式的概率密度 $p(x,t)$ 满足什么自相似关系呢?从概率密度 $p(x,t)$ 的积分和(5.44)式,得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} p(x',t)\mathrm{d}x' &= P(x'(t)<x)\\ &= P(t^H x'(1)<x)\\ &= P(x'(1)<xt^{-H})\\ &= \int_{-\infty}^{xt^{-H}} p(x',1)\mathrm{d}x'.\end{aligned} \tag{5.47}$$

将(5.47)式微商一次,得

$$p(x,t)=t^{-H}p(xt^{-H},1). \tag{5.48}$$

(5.48)式说明在坐标系$\left(\frac{p}{t^{-H}},\frac{x}{t^{H}}\right)$中所有的概率密度 p 都是相同形式. 当 $H=\frac{1}{2}$ 时参见(3.17)式.

从前面几节看出,白噪声是不相关的随机信号,布朗噪声是短程相关的随机信号,而分数维布朗噪声可以看作长程相关的随机信号.

§5.5 方差、自相关函数、功率谱等标度指数的关系

上一节我们谈到了自相似的随机过程(5.22)式,它普遍存在于多尺度系统中. 对自相似随机过程经常用到的统计量有方差$\langle x^2\rangle$、自相关函数 $R(\tau)=\langle x(t+\tau)x(t)\rangle$、功率谱 $S(f)$、分数维 D 等,它们在多尺度系统中都呈现幂律状态:

$$\begin{aligned}\langle x^2(t)\rangle &\propto t^{2H},\\ R(\tau) &\propto \tau^{-\gamma},\\ S(f) &\propto f^{-\beta},\\ N &\propto r^{-D}.\end{aligned}\tag{5.49}$$

现在我们较为严格地论述这些标度指数 H,γ,β,D 之间的关系.

首先论述 H 和 γ 之间的关系. 我们设分数维布朗运动的粒子在时刻 $t=0$ 时处在位置 $x=0$,则 t 时刻后的位移就是

$$x(t)=\int_0^t v(t')\mathrm{d}t',\tag{5.50}$$

其中 v 是粒子速度,那么均方位移$\langle x^2\rangle$随时间的变化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\langle x^2\rangle}{\mathrm{d}t} &= 2\langle x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\rangle = 2\int_0^\tau\langle v(t)v(t')\rangle\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^\tau R(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{5.51}$$

将(5.51)式积分一次,得到

$$\langle x^2\rangle = 2\int_0^\tau\left(\int_0^\tau R(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t.\tag{5.52}$$

若速度自相关函数表达式仍为 $R(\tau)\propto\tau^{-\gamma}$,那么代入(5.52)式后,就有

$$\langle x^2\rangle\propto\tau^{-\gamma+2}.\tag{5.53}$$

$\langle x^2\rangle$按(5.49)式为$\langle x^2\rangle\propto\tau^{2H}$,所以

$$2H=2-\gamma,\tag{5.54}$$

即

$$H=1-\frac{\gamma}{2}. \tag{5.55}$$

其次我们研究功率谱指数 β 和 H 之间的关系. 由量纲分析已经得到(5.32)式,即

$$\beta=2H+1. \tag{5.56}$$

再来看维数 D 和 H 的关系. 已经研究过该关系为

$$D=2-H. \tag{5.57}$$

最后谈 β 和 γ 的关系. 由于自相关函数 $R(\tau)$ 和功率谱 $S(f)$ 互为傅里叶变换,

$$S(f)=\int_0^\infty R(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{5.58}$$

由(5.49)式,有

$$R(\lambda\tau)=\lambda^{-\gamma}R(\tau), \tag{5.59}$$

那么由(5.58)式,有

$$\begin{aligned}S(\lambda f)&=\int_0^\infty R(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f\lambda\tau}\mathrm{d}\tau\\&\overset{\lambda\tau=\tau'}{=}\int_0^\infty R\left(\frac{\tau'}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f\tau'}\mathrm{d}\left(\frac{\tau'}{\lambda}\right)\\&=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\gamma}R(\tau')\mathrm{e}^{\mathrm{i}f\tau'}\mathrm{d}\tau'\\&=\lambda^{\gamma-1}S(f).\end{aligned} \tag{5.60}$$

(5.60)式的解为

$$S(f)\propto f^{-(1-\gamma)}. \tag{5.61}$$

将(5.61)式与(5.49)式比较,得

$$\beta=1-\gamma. \tag{5.62}$$

同样,(5.49)式中的 $\langle x^2\rangle$ 可以写成

$$\langle x^2(\lambda t)\rangle=\lambda^{2H}\langle x^2(t)\rangle. \tag{5.63}$$

(5.63),(5.59),(5.60)式都是自相似随机过程的重正化群关系.

§5.6 列维运动

前面谈的布朗运动中,下一步如何游动是和上一步游动毫无关系的,即我们假定 $\langle \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\rangle=\delta_{ij}$. 但是在实际游动中,$\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 是相关的. 例如我们设

$$\langle \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\rangle\propto\frac{A}{|i-j|^\gamma}, \tag{5.64}$$

那么(5.4)式就变成

$$\langle r^2(n)\rangle = \langle (\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i)^2 \rangle = n + 2\sum_{i>j}^{n} \langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \rangle = n + Bn^{2-\gamma}. \tag{5.65}$$

注意其中最后一个和号$\sum$中共有 n^2 个(5.64)式的形式．因此，当 $\gamma<1$ 时，(5.65)式右端第二项占优，则

$$\langle r^2(n)\rangle \propto n^{2-\gamma}, \quad \langle r^2(t)\rangle \propto t^{2-\gamma}. \tag{5.66}$$

(5.66)式右端是幂函数，n 相当于 t．和(5.8)式比较看出，此时的扩散方差比布朗运动要大．这是由于游动的当前一步和前一步相关的结果，因而是一种长程相关．

和(5.30)式比较看出，

$$H=1-\frac{\gamma}{2}. \tag{5.67}$$

(5.67)式说明，这种游动相当于赫斯特指数为 $H=1-\frac{\gamma}{2}$的分数维布朗运动．它和(5.55)式一致．

如果我们把§5.1中游动者的位置看成是“质量”M，那么按(4.61)式游动的“质量”M 就正比于时间：

$$M \propto t \propto r^D, \tag{5.68}$$

其中 r 是时间 t 时刻游动的距离．此时，由(5.68)式就得到均方差位移

$$\langle r^2(t)\rangle \propto t^{\frac{2}{D}}, \tag{5.69}$$

其中 D 是随机游动的分数维．显然 $D=2$ 就对应于通常的布朗运动．

湍流中的里查孙扩散(见第八章)位移方差和 t^3 成正比，显然比布朗运动扩散得快．

由(5.49)式看出，自相关函数 $R(\tau)$ 的形式是幂函数

$$R(\tau) \propto \tau^{-\gamma}. \tag{5.70}$$

正是因为长程相关引起了更快的扩散，所以在游动中，游动的距离间隔有小也有大，见§1.8.

随机游动有的只跳一个间隔，有的可以跳3个间隔或者更多的间隔，而且跳一个间隔和跳多个间隔的概率也不同．例如，若空间间隔是 a，跳一个格距 $\pm a$ 的概率为 C，即

$$\pm a, \quad 概率为\ C. \tag{5.71}$$

则跳 a 的 $b(b>1)$倍间隔的概率变小了，为$\frac{C}{M}(M>1)$，即

$$\pm ab \quad (b>1), \quad 概率为\frac{C}{M}. \tag{5.72}$$

类似地，跳 a 的 b^j 倍间隔的概率为$\frac{C}{M^j}$.

图 5.6 是 $M=4, b=3, a=1$ 的魏尔斯特拉斯随机游动. 图中 O 代表游动的开始点. 在一个大圆中游动先完成了四步 $a=1$ 的游动(从 O 开始的四个小箭头),然后又是 $ba=3$ 的游动(图中较大箭头所示),接着又是 $a=1$ 的四步,$ba=3$ 的一步等. $a=1$ 的四步形成一个基本集团,完成 $ba=3$ 四步形成第二集团. 下一个大的跳跃是 $b^2a=9$(图中特大箭头所示),形成跳跃步长度的层次. 因此,这种游动的距离可以跨量级. 这种游动称为魏尔斯特拉斯游动.

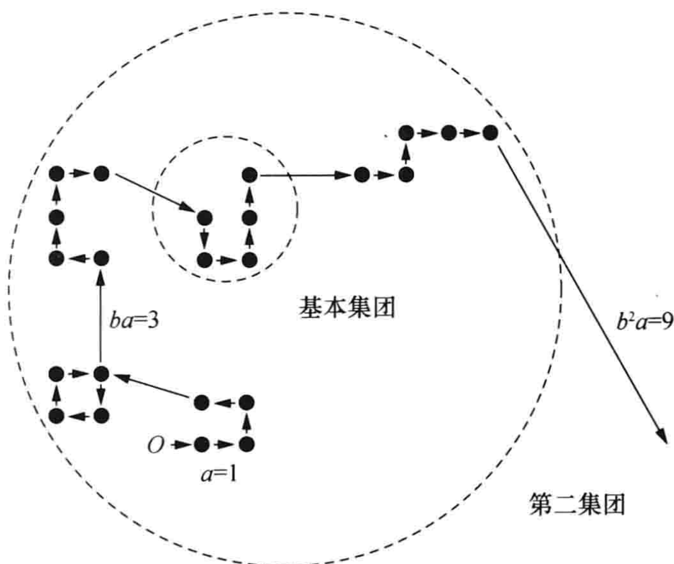


图 5.6 魏尔斯特拉斯随机游动

现在求跳跃到长度 l 的概率密度,

$$p(l) = C\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j}[\delta(l-b^ja)+\delta(l+b^ja)]. \tag{5.73}$$

通过归一化,常数 C 取值$\dfrac{M-1}{2M}$,故(5.73)式变为

$$p(l) = \frac{M-1}{2M}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j}[\delta(l-b^ja)+\delta(l+b^ja)]. \tag{5.74}$$

(5.74)式说明,若 M 比较大时,跳跃到左边邻居和右边邻居的概率大约为 $C=\dfrac{1}{2}$.

虽然跳跃的长度增加,其概率减小,但平均讲,在跳一大步之前,大约 M 次小步跳跃已经完成(见图 5.6).

由于有了(5.74)式,那么二阶矩

$$\langle l^2 \rangle = \frac{(M-1)a^2}{M}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2}{M}\right)^j. \tag{5.75}$$

显然,只要 $b^2>M$,那么二阶矩就发散,即$\langle l^2 \rangle \to \infty$,和第一章讨论的列维分布是

相同的.

下面我们来论证，$p(l)$是一个重尾幂函数分布，为此我们考虑 $p(l)$的傅里叶变换

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(l)\mathrm{e}^{ikl}\,\mathrm{d}l = \frac{M-1}{M}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{M^j}\cos(kb^j a), \tag{5.76}$$

其中 $\Phi(k)$称为特征函数. (5.76)式就是著名的魏尔斯特拉斯函数.

我们看看(5.76)式的标度方程，即

$$\begin{aligned}\Phi(bk) &= \frac{M-1}{M}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{M^j}\cos(kb^{j+1}a)\\ &= \frac{M-1}{M}\sum_{j=-1}^{\infty}\frac{1}{M^j}\cos(kb^{j+1}a) - \frac{M-1}{M}\frac{1}{M^{-1}}\cos(ka).\end{aligned}$$

令 $J=j+1$，得

$$\begin{aligned}\Phi(bk) &= \frac{M-1}{M}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{M^{J-1}}\cos(Rb^J a) - (M-1)\cos(ka)\\ &= \frac{M-1}{M}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{M}{M^J}\cos(kb^J a) - (M-1)\cos(ka)\\ &= M\Phi(k) - (M-1)\cos(ka).\end{aligned} \tag{5.77}$$

(5.77)式是一个非齐次函数方程，它的非齐次部分是周期函数，不存在奇异性(使方程发散)，而齐次部分为

$$\Phi(bk)=M\Phi(k)=b^{\alpha}\Phi(k). \tag{5.78}$$

(5.78)式的解为

$$\Phi(k)=|k|^{\alpha},\quad \alpha=\frac{\ln M}{\ln b}. \tag{5.79}$$

我们不妨设

$$\Phi(k)=1-|k|^{\alpha}\approx \mathrm{e}^{-|k|^{\alpha}}. \tag{5.80}$$

对(5.80)式做傅里叶变换很容易得到 $p(l)\propto l^{-(1+\alpha)}$，它就是(1.24)式和列维分布. 这种随机游动称为列维运动. 如果(5.80)式中加上一个时间 t，

$$\Phi(k,t)=\mathrm{e}^{-|k|^{\alpha}t}, \tag{5.81}$$

则(5.81)式就是方程

$$\frac{\partial\Phi(k,t)}{\partial t}=-|k|^{\alpha}\Phi(k,t) \tag{5.82}$$

的解

因为特征函数中 Φ 和概率密度 p 互为傅里叶变换，即

$$p(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k,t)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k \tag{5.83}$$

（参见(5.34)式），则

$$\frac{\partial^{\alpha} p(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k,t)(\mathrm{i}k)^{\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k. \tag{5.84}$$

对(5.82)式做逆变换，则有

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^{\alpha} p(x,t)}{\partial x^{\alpha}}. \tag{5.85}$$

请注意$\frac{\partial^{\alpha} p}{\partial x^{\alpha}}$和$-|k|^{\alpha}$互为傅里叶变换，即

$$\frac{\partial^{\alpha} p}{\partial x^{\alpha}} \overset{\mathrm{F}}{\Leftrightarrow} -|k|^{\alpha}\Phi. \tag{5.86}$$

请参阅第十一章(11.5)式.

归纳来讲，布朗运动服从正态分布(5.14)式，它对应的扩散方程是(5.17)式：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \sigma^2 = 2Kt.$$

而对列维运动，相应的扩散方程为

$$\frac{\partial^{\beta} p}{\partial t^{\beta}} = \frac{\partial^{\alpha} p}{\partial x^{\alpha}}. \tag{5.87}$$

它称为分数阶福克-普朗克(fractional Fokker-Planck，简称 FFP)方程，其中 α,β 可以是分数. 该方程的傅里叶变换为特征函数 Φ 的方程为

$$\frac{\partial^{\beta}\Phi(k,t)}{\partial t^{\beta}} = -|k|^{\alpha}\Phi(k,t).$$

它的解为

$$\Phi(k,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta+1)}(|k|^{\alpha}t^{\beta})^m = \mathrm{E}_{\beta}(-|k|^{\alpha}t^{\beta}),$$

其中 $\mathrm{E}_{\beta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\beta m+1)} x^m$ 是米塔-列夫勒(Mittag-Leffler)函数，具体见第十一章. 若取 $\beta=1$，$\mathrm{E}_1(x)=\mathrm{e}^x$，则 $\mathrm{E}_1(-|k|^{\alpha}t^1) = \mathrm{e}^{-|k|^{\alpha}t}$，它就是(5.81)式的列维分布，其特征函数满足(5.81)式. 它的傅里叶变换就是列维分布的概率密度

$$p(x,t) = x^{-(1+\alpha)}t \quad (x\text{ 足够大时}). \tag{5.88}$$

(5.88)式正是重尾分布.

现在看列维分布的特征函数的标度关系. 对(5.81)式做标度变换

$$k' = \lambda k, \quad t' = \frac{1}{\lambda^{\alpha}}t, \tag{5.89}$$

则

$$\Phi(k',t')=\mathrm{e}^{-\lambda^{\alpha}|k|^{\alpha}\frac{1}{\lambda^{\alpha}}t}=\mathrm{e}^{-|k|^{\alpha}t}=\Phi(k,t)$$

$$=\Phi\left(\lambda k,\frac{1}{\lambda^{\alpha}}t\right)=\Phi(t^{1/\alpha}k,1)\quad(令\ \lambda=t^{\frac{1}{\alpha}}). \tag{5.90}$$

(5.90)式说明,在标度变换(5.89)式下,列维分布的特征函数保持不变.

列维运动的概率分布 p 满足分数阶福克-普朗克方程(5.85). 我们对(5.85)式做标度变换

$$x'=\lambda^{\frac{1}{\alpha}}x,\quad t'=\lambda t,\quad p'=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}p, \tag{5.91}$$

则(5.85)式

$$左边=\frac{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}{\frac{1}{\lambda}}\frac{\partial p'}{\partial t'}=\lambda^{1+\frac{1}{\alpha}}\frac{\partial p'}{\partial t'}. \tag{5.92}$$

在(5.85)式右边利用(5.84)式,并注意 $k=\lambda^{\frac{1}{\alpha}}k'$,得到

$$右边=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|k'|^{\alpha}(\lambda^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x'}\Phi(k',t')\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}k'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|k'|^{\alpha}\lambda\Phi(k',t')\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x'}\mathrm{d}k'$$

$$=\lambda\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\frac{\partial^{\alpha}p'}{\partial x'^{\alpha}}=\lambda^{1+\frac{1}{\alpha}}\frac{\partial^{\alpha}p'}{\partial x'^{\alpha}}. \tag{5.93}$$

由(5.92),(5.93)式,得

$$\frac{\partial p'}{\partial t'}=\frac{\partial^{\alpha}p'}{\partial x'^{\alpha}}. \tag{5.94}$$

(5.94)式说明,在标度变换(5.91)式下,FFP 方程的形式不变,且

$$p(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}x,\lambda t)=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}p(x,t). \tag{5.95}$$

令 $\lambda=\frac{1}{t}$,则有

$$p(t^{-\frac{1}{\alpha}}x,1)=t^{\frac{1}{\alpha}}p(x,t)$$

或

$$p(x,t)=t^{-\frac{1}{\alpha}}p(t^{-\frac{1}{\alpha}}x,1). \tag{5.96}$$

(5.95)式或(5.96)式就是列维运动的概率密度分布的标度律.

(5.91)式说明,列维随机变量符合自相似随机过程

$$x(\lambda t)\overset{\mathrm{d}}{=}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}x(t). \tag{5.97}$$

例如,将(5.88)式代入(5.95)式,得

$$左边=(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}x)^{-(1+\alpha)}(\lambda t)=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}(1+\alpha)}x^{-(1+\alpha)}\lambda t$$

$$=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}x^{-(1+\alpha)}t=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}p(x,t)=右边.$$

将(5.97)与(5.25)式比较，看出

$$H=\frac{1}{\alpha}. \tag{5.98}$$

由于 $0<\alpha<2$，所以 $\frac{1}{2}<H<\infty$，因此，列维过程是赫斯特指数为 $\frac{1}{\alpha}$ 的自相似过程.

§5.7 列维分布图像及应用

通常列维运动的概率分布 $p(x)$ 不能用初等函数来表示，仅有少数几个能用初等函数表示，例如 $\alpha=2$ 时，

$$p(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}, \tag{5.99}$$

$\alpha=1$ 时，

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \tag{5.100}$$

$\alpha=\frac{1}{2}$ 时，

$$p(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}}e^{-\frac{1}{4x}}. \tag{5.101}$$

(5.99)，(5.100)，(5.101)分别称为正态分布、柯西分布和列维-斯米尔诺夫(Levy-Smirnov)分布.

图5.7显示不同 α 时的列维分布图像. 从图5.7看出，α 越小，$p(0)$ 高度越高，$p(x)$ 图像的中部越窄，尾巴越厚.

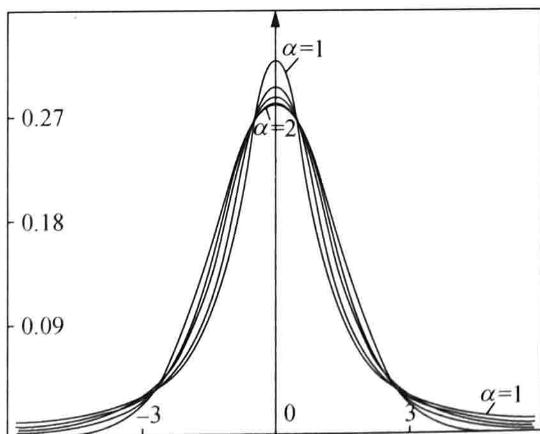


图5.7 不同 $\alpha(1<\alpha<2)$ 时的列维概率密度 $p(x)$

通常在 x 比较大时(即尾巴上),列维分布函数可近似为

$$p(x)=|x|^{-(\alpha+1)}. \tag{5.102}$$

例如,$\alpha=1$ 和$\frac{1}{2}$时分别是(5.100),(5.101)式.

对列维分布,由于物理量跨越很宽尺度,导致平均值(一阶矩)及高阶矩无意义.一般 n 阶矩可以表示为

$$\langle x^n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\mathrm{d}x. \tag{5.103}$$

$x\to\pm\infty$时,$\langle x^n\rangle$存在的必要条件是 $p(x)$衰减得比$|x|^{n+1}$要快,因此对列维分布概率密度(5.102)式而言,当 $n\geqslant\alpha$ 时,各阶矩就不存在.例如在(5.102)式中,当 $\alpha\leqslant 2$,就不存在方差(二阶矩),当 $\alpha\leqslant 1$ 时,就不存在平均值(一阶矩).

列维分布在物理学中有许多应用,下面举几个例子.

(1) 考虑布朗运动 $x(t)$,$t\geqslant 0$,$x(0)=0$.第一次达到位置 $x(t)=a$ 的最小时间 $T(a)$称为第一次通过时间,

$$T(a)=\min\{t\geqslant 0,x(t)=a\}. \tag{5.104}$$

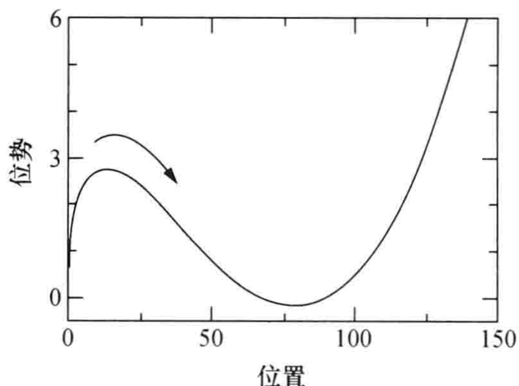


图 5.8 系统克服势垒到达稳定状态

在许多系统中常常要知道克服势垒达到稳定位置所需要的平均时间,见图 5.8.下面讨论对于确定的时间 t,关系 $T(a)<t$ 成立的概率为 $p(T(a)<t)$,即在时间间隔$[0,t]$内已经达到 a 值的概率.

设 $p(T(a)<t,x(t)>a)$是两个条件 $T(a)<t$,$x(a)>b$ 在时间 t 内同时满足的概率,因此

$$p(x(t)>a)=p(T(a)<t,x(t)>a)+p(T(a)>t,x(t)>a), \tag{5.105}$$

但是按照 $T(a)$的定义(5.104)式,(5.105)式左边 $p(x(t)>a)$表示在时刻 t 处 $x(t)$超过 a 的概率,所以(5.105)式右端的项

$$p(T(a)>t,x(t)>a)=0, \tag{5.106}$$

那么(5.105)式为

$$p(x(t)>a)=p(T(a)<t,x(t)>a). \tag{5.107}$$

由于对称性,

$$p(T(a)<t,x(t)>a)=p(T(a)<t,x(t)<a), \tag{5.108}$$

所以由(5.106),(5.107)式,得

$$p(T(a)<t,x(t)>a)=p(x(t)>a), \tag{5.109}$$

$$p(T(a)<t,x(t)<a)=p(x(t)>a). \tag{5.110}$$

将(5.109),(5.110)相加,得

$$\begin{aligned} p(T(a)<t) &= 2p(x(t)>a) \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}\,dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{a}{\sigma\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy. \end{aligned} \tag{5.111}$$

(5.111)式是在时间 t 以前达到 a 的累计概率. 第一通过时间 $T(a)$ 的概率密度就是(5.111)对 t 的微商,即

$$f_{T(a)}(t)=\frac{dp}{dt}=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2 t}}. \tag{5.112}$$

图 5.9 给出了 $a=1$ 时的概率密度 $f_{T(a)}$(图中实线). 将(5.112)与(5.101)比较看出,它属于列维-斯米尔诺夫分布,也就是说在 $T(a)\leqslant t$ 内达到位置 $x=a$ 的概率密度是 $\alpha=\frac{1}{2}$ 的列维分布. 图 5.9 中虚线是 $p-t^{-\frac{3}{2}}$ 曲线.

(2) 考虑 (x,z) 平面上在 x_0 处有一排放的点源,见图 5.10,点源在上半平面上在随机方向角 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内均匀地排放. 下面讨论若在高度 h 上有一个检测装置,质点扩散到位置 x 这个随机变量的概率分布函数.

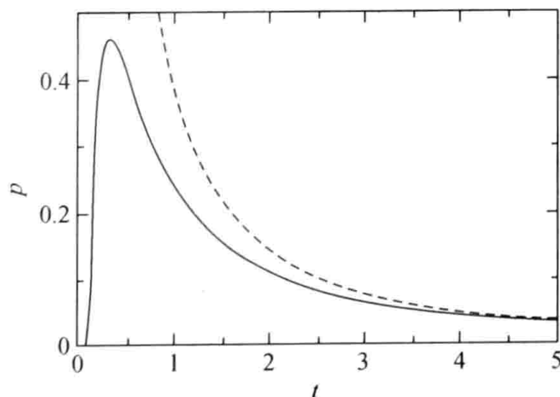


图 5.9 第一通过时间概率密度

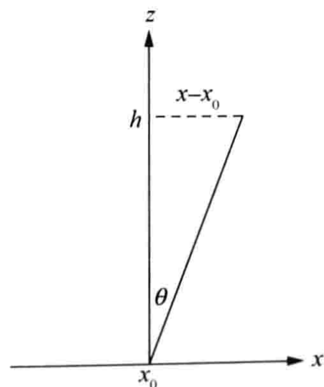


图 5.10 点源在半平面上的均匀随机排放

由于均匀排放,均匀分布概率的累计概率(或分布函数)

$$F_X(x)=p(X\leqslant x)=p\left(\tan\theta\leqslant\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$=p\left(\theta\leqslant\arctan\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x-x_0}{h},\tag{5.113}$$

那么与概率 p 对应的概率密度函数为

$$f=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2\right]}\frac{1}{h}.\tag{5.114}$$

(5.114)式就是(5.100)式 $\alpha=1$ 的列维分布,即柯西分布.

(3) 图 5.11(a),(b),(c),(d)是四种观测到的时间序列. 请注意图 5.11(a),(b),(c)三个时间序列涨落有的很大,但是图 5.11(d)的涨落的大小差别不大.

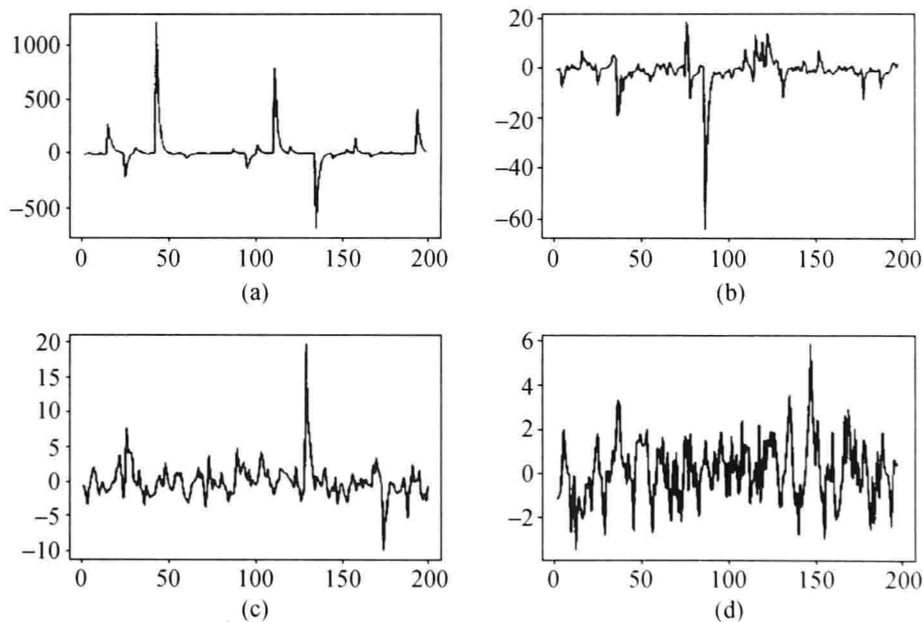


图 5.11 四种不同的时间序列

(a) $\alpha=0.6$;(b) $\alpha=1.2$;(c)$\alpha=1.8$;(d) $\alpha=2.0$

我们对时间序列采用回归

$$z_t=x_t-0.5x_{t-1}\tag{5.115}$$

来分析. 假设 z_t 满足列维分布,其特征函数为

$$\Phi(k)=\mathrm{e}^{-|k|^\alpha},\tag{5.116}$$

即相应的概率函数是

$$p(x)=|x|^{-1-\alpha}, \tag{5.117}$$

则分别计算出图 5.12 中的 α 为(a) $\alpha=2.0$,(b) $\alpha=1.8$. 从图 5.12 看出,α 愈小,概率密度的尾巴愈厚. 请注意图 5.12 横坐标数值的区别.

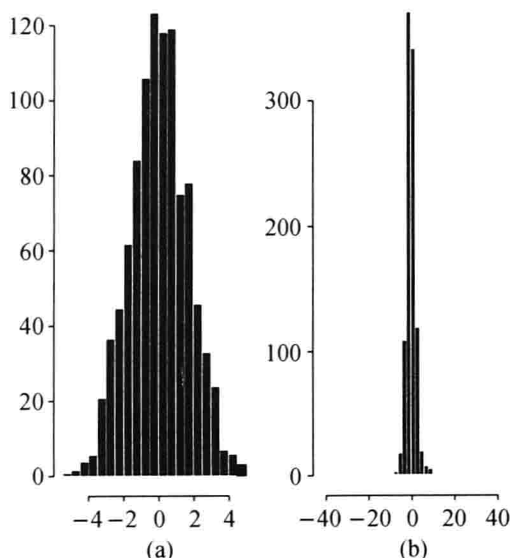


图 5.12 时间序列直方图

(a) $\alpha=2.0$;(b) $\alpha=1.8$

§5.8 广义列维分布

列维分布的特征函数一般化后可以写成

$$\Phi(k)=\exp\left(-\sigma^{\alpha}|k|^{\alpha}\left(1-\mathrm{i}\beta\operatorname{sgn}(k)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\mu k\right), \tag{5.118}$$

其中 $0<\alpha\leqslant2$ 称为列维分布的稳定度指数,$-1\leqslant\beta\leqslant1$ 称为偏斜度参数,σ 称为尺度参数,μ 称为移动参数. 相应地,FFP 方程(5.85)扩展为

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^{\alpha(1-\beta)}}{\partial^{\alpha(1-\beta)}}\left(\frac{\partial^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha\beta}}\right)p. \tag{5.119}$$

当 $\beta=0$ 时,(5.119)式就化简为(5.85)式. 图 5.13 显示列维概率密度 p 与 α 的关系. 它和图 5.12 类似,α 愈小,$x=0$ 处的数值愈大,尾巴愈厚.

图 5.14 是列维概率密度和尺度参数 σ 的关系. 从图 5.14 看出,σ 愈大,概率分布的尾巴愈厚.

图 5.15 和图 5.16 是列维概率密度和偏斜度 β 的关系. 从图 5.15 和图 5.16 看出,β 为负值时,长尾巴在 x 的负值一边,β 为正值时,长尾巴在 x 的正值一边.

图 5.17 和图 5.18 给出当偏斜度 β 不变时,列维概率密度函数随 α 的变化.

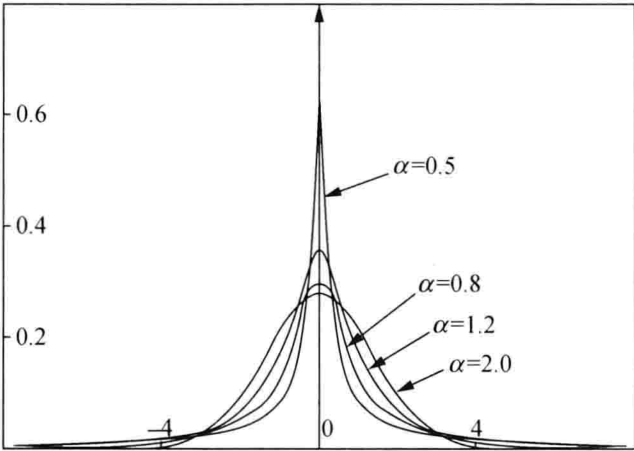


图 5.13　列维概率密度 p 与 α 的关系

$(\beta=0, \sigma=1, \mu=0)$

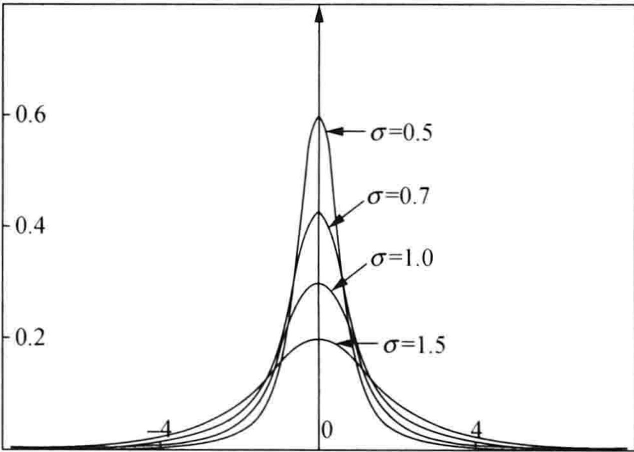


图 5.14　列维概率密度和尺度参数 σ 的关系

$(\alpha=1.2, \beta=0, \mu=0)$

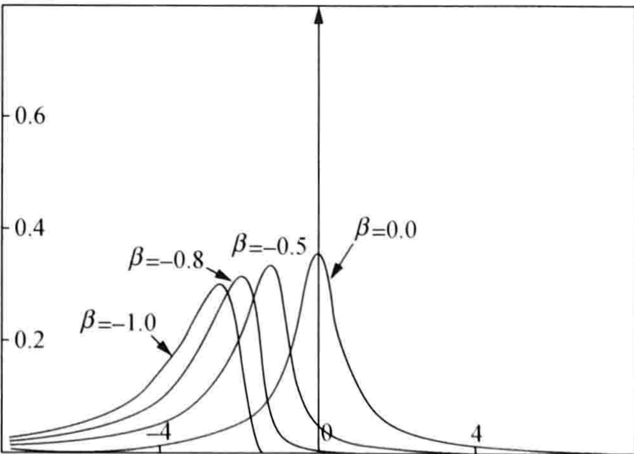


图 5.15　列维概率密度和偏斜度 β 的关系

$(\alpha=0.8, \sigma=1.0, \mu=0)$

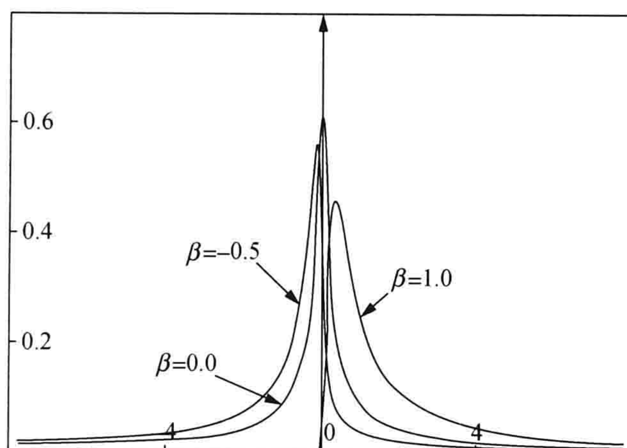


图 5.16 列维概率密度和偏斜度 β 关系

($\alpha=0.5, \sigma=1.0, \mu=0$)

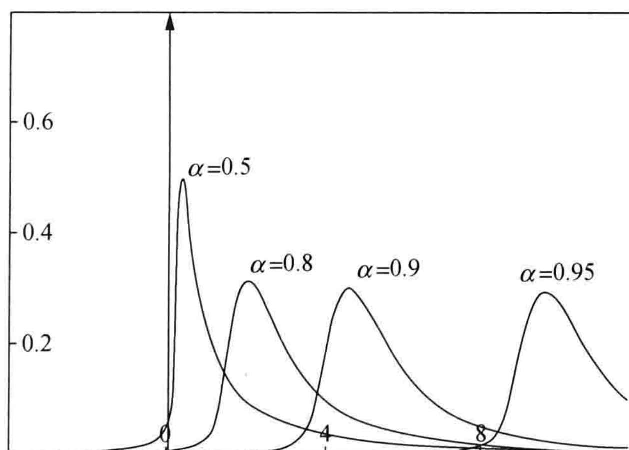


图 5.17 列维概率密度在偏斜度 β 固定时随 α 的变化

($\alpha<1, \beta=0.8, \sigma=1.0, \mu=0$)

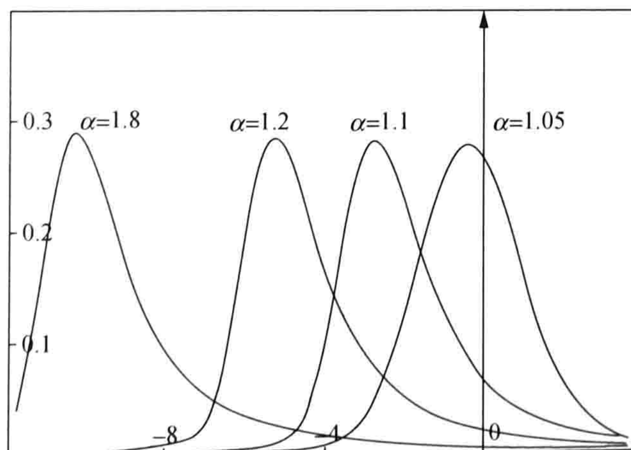


图 5.18 列维概率密度在偏斜度 β 固定时随 α 的变化

($\alpha>1, \beta=0.8, \sigma=1.0, \mu=0$)

小 结

从近 200 年前发现的布朗运动，到近 30 年来发现的分数维布朗运动，再到涨落大的重尾列维运动，人们对随机过程的认识加深了，愈来愈接近于实际的随机现象. 给予我们最大的启示是分数维的分形和分数阶微积分的引入，使短程相关的布朗运动变成长程相关，增加了记忆性，对研究具有复杂层次结构现象的生物学、物理学的自组织现象，以及人脑及社会现象都具有现实意义.

第六章　小波(子波)变换

为什么小波(子波)变换和分形相联系？大家知道，分形的特点是多尺度. 表征多尺度可以用标度指数这种不变量，但是不同尺度上物理状态如何随时间和空间变化呢？小波变换能看到这一点. 小波变换有两个参数：一个是尺度，它能把不同尺度下的情况显示出来；另一个是时间(或空间)位置，它能把该位置上物理量的变化显示出来. 虽然该位置上的物理量的涨落有大有小，但是小波变换就像显微镜一样，能通过调节放大倍数将其看清楚. 而且，小波变换本身也具有标度不变性.

§6.1　傅里叶变换和小波变换描述自然界的异同

为了解小波变换，我们必须将小波变换与傅里叶变换做比较. 简单地说，傅里叶变换是将一个信号分解成不同波长或周期的正弦或余弦信号的叠加. 图 6.1 最下面一个振荡函数是上面三个正弦函数或余弦函数相加的结果. 因为正余弦函数是基函数，它就像建筑块，一个信号的傅里叶展开就好比信号是由建筑块堆积出来的，也就是说傅里叶变换的建筑块是铺开到整个时间轴$(-\infty,+\infty)$上的正弦或余弦函数.

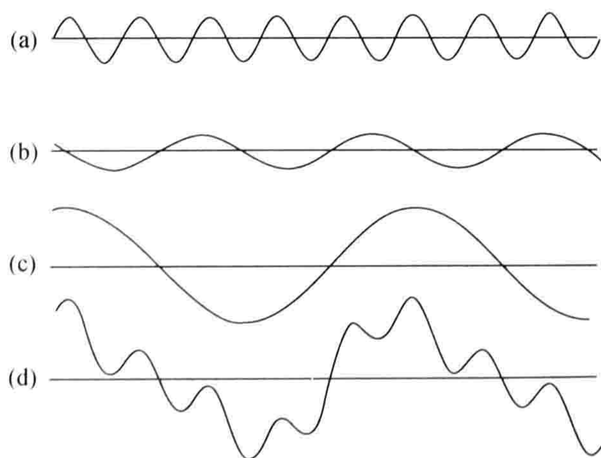


图 6.1　傅里叶展开

(d)中振荡函数是(a)～(c)中正弦函数或余弦函数相加的结果

这样描述有什么好处呢？通常来讲，我们认识自然界就是想从现在知道未来的事物是如何演化的．例如我们有一个金属棒，棒的一端被冷却，我们想知道金属棒的每个点上温度是如何变化的，也就是说在 t 时刻金属棒的每一点上温度是多少．在傅里叶以前没有人能够处理这个问题．但是当我们知道 $t=0$ 时刻金属棒的温度分布 $T_0(x)$(见图 6.2(a)，$T_0(x)$是棒上空间点 x 的函数)，对 $T_0(x)$做傅里叶变换就可以得到 $C_k(0)$，它是不同波数 k 下的正弦(或余弦)函数前的傅里叶系数，见图 6.2(b)．图中列出了 12 个波数($k=1,2,\cdots,12$)的傅里叶系数，即

$$C_k(0)=\frac{1}{\sqrt{k}}, \tag{6.1}$$

这样，傅里叶变换就把原来描述金属棒上温度 $T(x,t)$的难以捉摸的微分方程就退耦了，变成了一系列描述傅里叶系数 $C_k(t)$的独立的微分方程．任意时刻 t 的傅里叶系数 $C_k(t)$解出为

$$C_k(t)=C_k(0)\mathrm{e}^{-\frac{k^2 t}{100}}. \tag{6.2}$$

图 6.2(c)列出了 $t=0,1,5,10,50$ 的 5 个不同时刻的 $C_k(t)$. 系数 $C_k(t)$对每个 t 在整个金属棒上是相同的，似乎棒上位置 x 的空间信息消失了，但是当再做一次逆傅里叶变换后，即由波数 k 空间又变到了物理空间，这些系数 $C_k(t)$又和傅

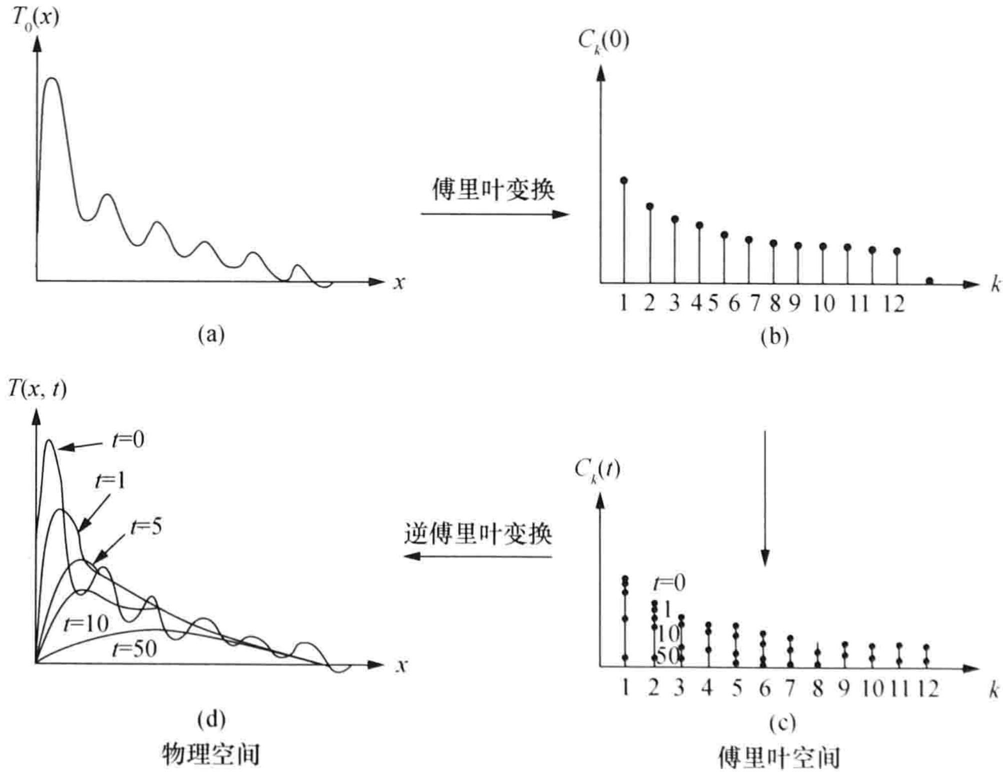


图 6.2　傅里叶空间的不同方程

里叶变换的建筑块(正弦或余弦函数)一起组成每个时刻 t 金属棒上每一点的温度. 图 6.2(d)显示了上述 5 个时刻金属棒上的温度 $T(x,t)$. 傅里叶变换告诉我们一个函数是如何由许多不同频率(或不同波数)的波组成的,但是它不能告诉我们什么时间这些波会发射出来,也就是缺少时间本身的信息.

在客观世界中,有很多现象是突然发生的,例如股票的暴跌、突降大暴雨等等,都是局部现象,而傅里叶变换将这种局部现象按正、余弦函数铺开到整个时间轴上,这种局部突变就不容易被发现了.

小波变换和傅里叶变换不同之处在于,小波变换的建筑块是一个可以伸缩也可以平移的局部性母小波 $g(t)$,这样,一个函数 $f(t)$的小波变换可以写成

$$T_g(a,t_0) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)\mathrm{d}t , \tag{6.3}$$

其中 a 是尺度. 当 a 大时,表示尺度大,那么母小波 g 的形式就是矮而胖,见图 6.3(a);而当 a 小时,表示尺度小,那么母小波 g 的形式是瘦而高,见图 6.3(b). 当信号 $f(t)$的局部是一个小涨落时,我们就用高而瘦的小波去看它. 由于 g 瘦而高,在(6.3)式中它和 $f(t)$的乘积就使得小涨落的这种变化能被看清楚. 当信号 $f(t)$的局部是一个大涨落时,我们就用尺度 a 比较大的 g 去看它,此时 f 和 g 的乘积使放大倍数并不大,由于信号的涨落大,不必用太大的放大倍数就能看见它.

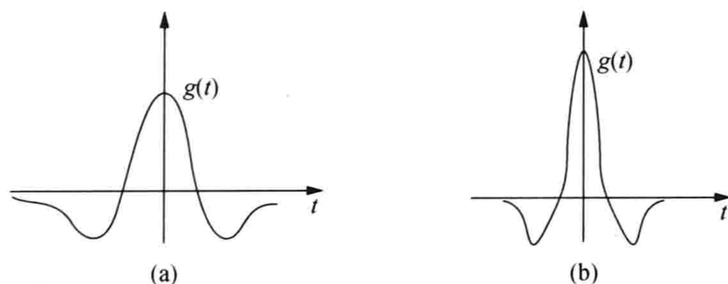


图 6.3 不同尺度 a 的小波

(a)大尺度;(b)小尺度

除了尺度参数 a 外,在(5.3)式中还有一个参数 t_0,它是信号 $f(t)$的时间位置. 由于信号 $f(t)$在不同的位置 t_0 上的状况(如涨落大小)不同,我们可以将母小波 g 来回移动,需要看信号的哪个位置上的状况,就把 g 放在哪个位置去看.

应当指出,尺度参数 a 在傅里叶变换中就相当于波数 k 或频率 f,因为$\frac{1}{k}$就是波长,$\frac{1}{f}$就是周期,所以波长和周期就分别是(6.3)式中的空间尺度和时间尺度 a. 因此,傅里叶变换将信号 $f(x)$或 $f(t)$分解成不同波长或不同周期的正、余弦波的叠加,波长或周期不同,就相当于尺度不同. 小波变换的参数 a 实际上

在傅里叶变换中已经有了,但是小波变换中参数 t_0 在傅里叶变换中是没有的.这里的 t_0 表示时间位置.傅里叶变换难以回答的问题,即不同尺度波长或周期的波何时会放射出,利用小波变换中的参数 t_0 就可以回答.很多读者往往看到小波变换很新鲜,愿意去用它,但只用一个尺度参数 a 去找 $f(x)$或$f(t)$中的主波长或主周期,这种必要性不是太大,更应该关注的是时间位置 t_0 这个参数.研究事物的演化就是要问事物在某一时刻 t_0 的状态.

在本章的后面将会看到,用 t_0 这个参数可以判断信号 $f(t)$是在何时发生变化的.

§6.2 小波变换的标度不变性

小波变换之所以常用来分析分形现象,关键还是在于它的标度不变性.

我们在(6.3)式假设信号 $f(t)$是具有标度不变性的分形信号,即

$$f(\lambda t)=\lambda^{\alpha} f(t), \tag{6.4}$$

其中 α 是其标度指数,那么由小波变换(6.3)式,对尺度 a 和时间位置 t_0 都做 λa 和 λt_0 的标度变换得到

$$T_g(\lambda a,\lambda t_0)=\frac{1}{\lambda a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g\left(\frac{t-\lambda t_0}{\lambda a}\right)\mathrm{d}t. \tag{6.5}$$

我们令

$$t=\lambda t', \tag{6.6}$$

则(6.5)式可以写成

$$T_g(\lambda a,\lambda t_0)=\frac{1}{\lambda a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t')g\left(\frac{\lambda t'-\lambda t_0}{\lambda a}\right)\mathrm{d}(\lambda t'),$$

再由(6.4)式,得

$$\begin{aligned} T_g(\lambda a,\lambda t_0) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{\alpha} f(t')g\left(\frac{t'-t_0}{a}\right)\mathrm{d}t' \\ &= \lambda^{\alpha} T_g(a,t_0). \end{aligned} \tag{6.7}$$

对于固定的 t_0,(6.7)式说明小波变换 $T_g(a,t_0)$和信号 $f(t)$具有相同的标度指数,即

$$T_g(a)=a^{\alpha}. \tag{6.8}$$

这就意味着信号 $f(t)$的标度指数 α 可以通过 $f(t)$的小波变换求得.在双对数坐标($\ln a,\ln T_g$)中选取不同的 a 和求得的 T_g,拟合出的直线的斜率就是信号 $f(t)$的标度指数 α,见图 6.4.图 6.4 的信号是湍流信号.通过图中曲线的拟合,直线的斜率是 $\alpha=\frac{1}{3}$,正是第五章论述的赫斯特指数 $H=\frac{1}{3}$.

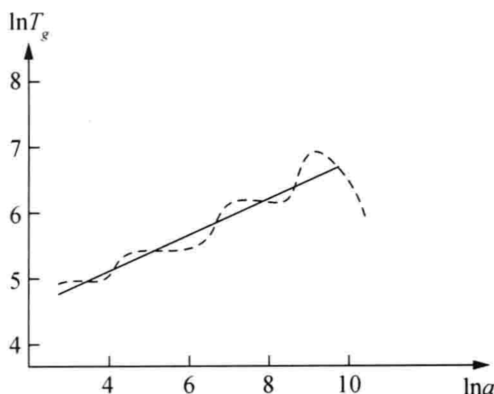


图 6.4 小波变换 $T_g(a)$ 随尺度 a 的变化

对于跨越好多尺度的分形信号 $f(t)$，用小波变换求其标度指数是一个实用的方法.

§6.3 常用的小波及卷积的含义

目前常用的小波函数 $g(t)$ 有以下四种：

(1)高斯小波. 它是高斯函数 $-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ 的一阶导数，即

$$g(t)=t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{6.9}$$

见图 6.5(a).

(2)墨西哥帽小波. 它是高斯函数 $-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ 的二阶导数，即

$$g(t)=(1-t^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{6.10}$$

见图 6.5(b).

(3)哈尔(Haar)小波. 此时

$$g(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.11}$$

见图 6.5(c).

(4)莫莱特(Morlet)小波. 此时

$$g(t)=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f_0}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{6.12}$$

其中 f_0 是中心频率. 它是一个复数小波，图 6.4(d)是它的实部. (6.12)式中的 $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ 是莫莱特小波形式的高斯包络线.

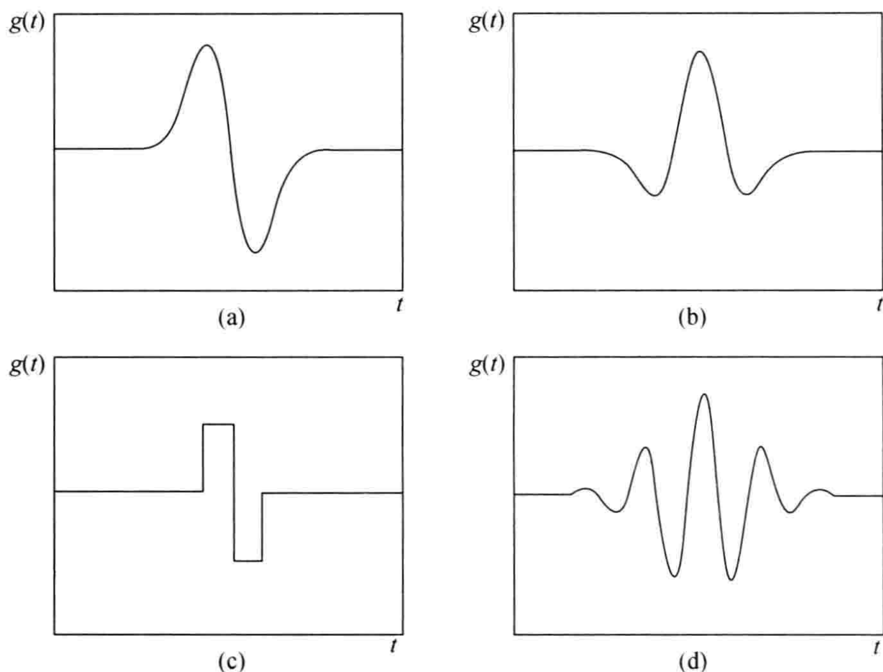


图 6.5 四种小波

(a) 高斯小波;(b) 墨西哥帽小波;(c) 哈尔小波;(d) 莫莱特小波

这四种小波都有局域性,它们只在 t 的一个小范围内有值,而在这个范围外为零. 这类似于天线有一个主瓣,能保证接收天线把信号的主要部分接收到. 而这种小波形式也使它在 t_0 位置上能将 t_0 附近的信号看得清楚. 图 6.5 四种小波的图像类似于孤立波和冲击波,这两种波都是局域性的.

在数学上小波变换(6.3)式的形式是一种卷积:

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) \mathrm{d}u \ , \tag{6.13}$$

为此我们要介绍一下卷积 $f * g$ 的物理含义.

假设一个单色光源,它的强度是 f,波长是 λ,那么理想的分光计测出的单色的功率谱密度是

$$f\delta(\lambda-\lambda_0), \tag{6.14}$$

其中 δ 函数满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1, \tag{6.15}$$

见图 6.6(a). 但是实际的分光计测出的单色光的谱是一条连续曲线

$$fg(\lambda-\lambda_0), \tag{6.16}$$

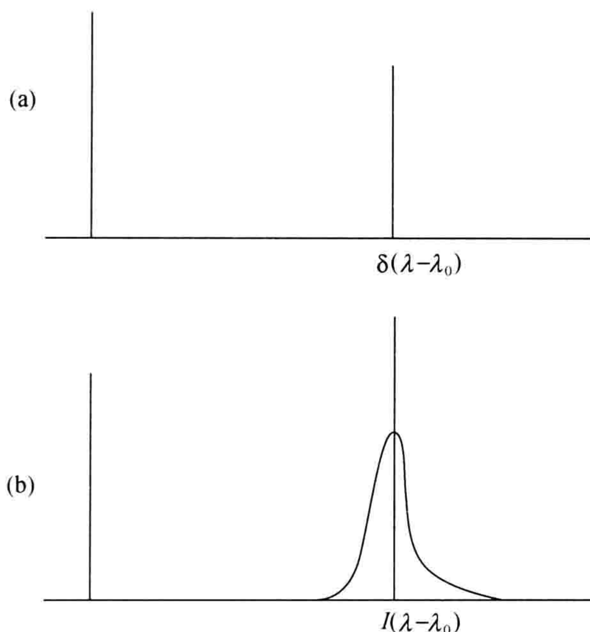


图 6.6 单色光的谱

(a) 进来的单色光;(b) 分光计测出的单色光

见图 6.6(b),其中 $g(\lambda)$ 称为仪器函数. 为了保证仪器测量的精度,它应该有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1. \tag{6.17}$$

因此,一个 δ 函数通过光谱仪后被铺开,也就是加以了平滑.

现在若是一个强度为 $f(\lambda)$ 的连续谱光源输入,那么分光计测出的是什么?我们设无穷小的波长间隔 $\mathrm{d}\lambda$,那么 $f(\lambda_0)\mathrm{d}\lambda$ 可视作波长为 λ_0 的单色光,因此分光计的输出光谱为

$$f(\lambda_0)g(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}\lambda_0,$$

此时连续光谱输出的总功率为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda_0)g(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}\lambda_0. \tag{6.18}$$

将(6.18)与(6.13)式对照,(6.18)式实际上就是源强 $f(\lambda)$ 和仪器函数 $g(\lambda)$ 的卷积. 这样从图 6.6 看出,卷积实际上是对信号的平滑,即用仪器函数对 $f(\lambda)$ 加权平均. 为了更清楚地说明卷积的意义,我们举两个例子.

(1) $g(u)$ 是图 6.8(a)的形状,$f(t)$ 是箱函数,

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{6.19}$$

箱函数也称为哈尔标度函数,见图 6.7. 图 6.8(a)是函数 $g(u)$,$g(-u)$ 则是图 6.8(a)的 $g(u)$ 对纵轴的反射,见图 6.8(b),而(6.13)式中 $g(t-u)$ 是将图 6.8(b)的

$g(-u)$图像向右移 t 个单位,见图 6.8(c). 由于 $f(u)$在$[0,1]$范围内的值为 1,所以 $f(u)$和 $g(t-u)$的值相乘只在$[0,1]$范围内有值,在这个范围外为零. 因此卷积 $f*g$ 就是乘积 $f(u)g(t-u)$曲线下的面积. 图 6.9(a)～(e)显示了不同 t 情况下的卷积.

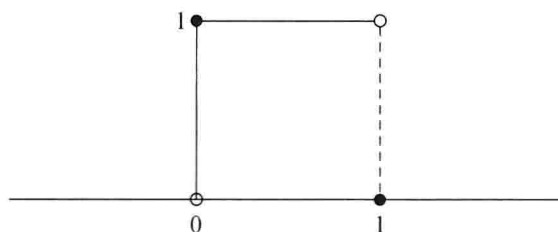


图 6.7 哈尔标度函数

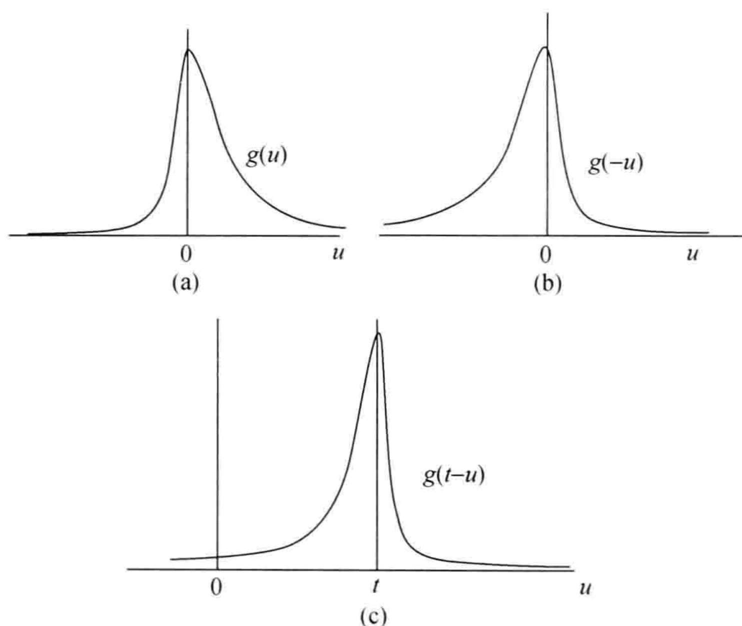


图 6.8 $g(u),g(-u),g(t-u)$的图像($t>0$)

(2) $f(u)$和 $g(u)$都是箱函数(6.19),现在求卷积 $f*g$.

和(1)相同,我们必须把箱函数对 $u=0$ 轴反射然后移动 t 个单位. 图 6.10(a)表示 $t<0$ 时,箱函数(右边)经过反射后再向左移 t 个单位的箱函数(左边). 从图 6.10(a)看出,由于原来的箱函数(右边)和左边的箱函数相互隔开,因而它们的乘积为零,即 $t<0$ 时 $f*g=0$.

当 $0\leqslant t<1$ 时,反射后箱函数向右移动 t 个单位,和原来的箱函数重叠的部分用黑影表示,见图 6.10(b). 它们的面积为 t,即 $f*g=t$. 对于 $1\leqslant t<2$,反射后箱函数向右移 t 个单位,仍然和原箱函数重叠,用黑影表示,见图 6.10(c).

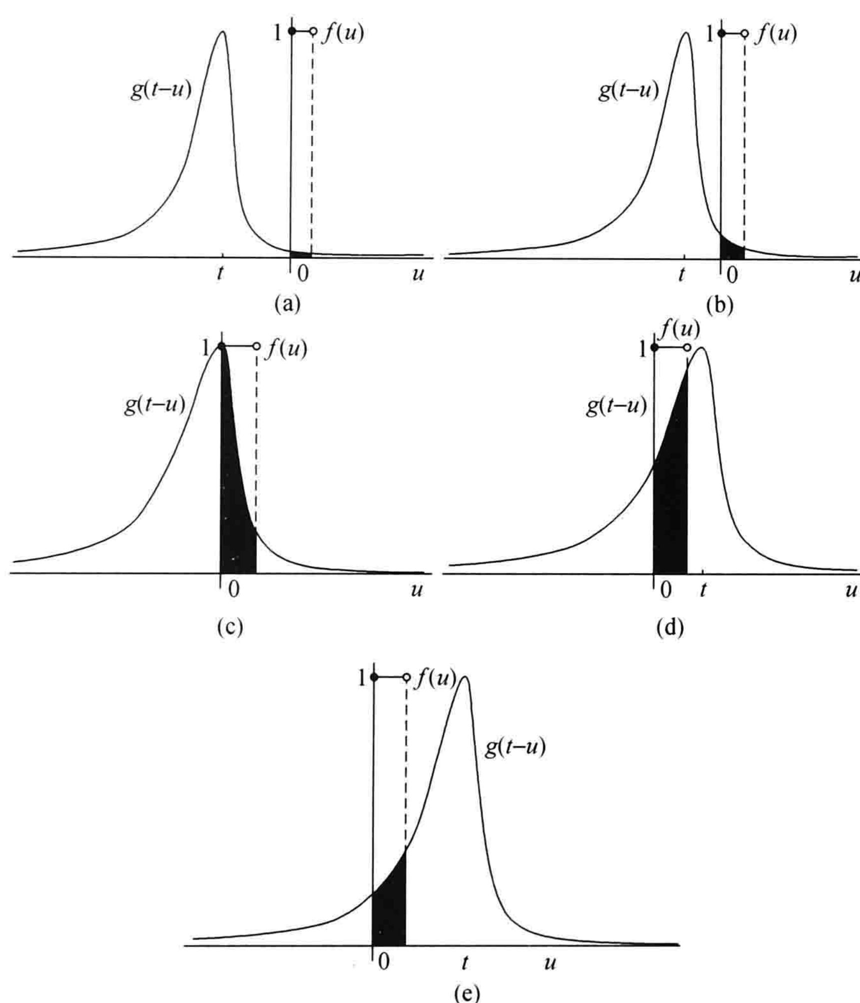


图 6.9 曲线下的面积是卷积

(a) $t<0$;(b) $t<0$ 但接近于 0;(c) $t=0$;(d) $t>0$;(e) $t>0$ 但接近于 0

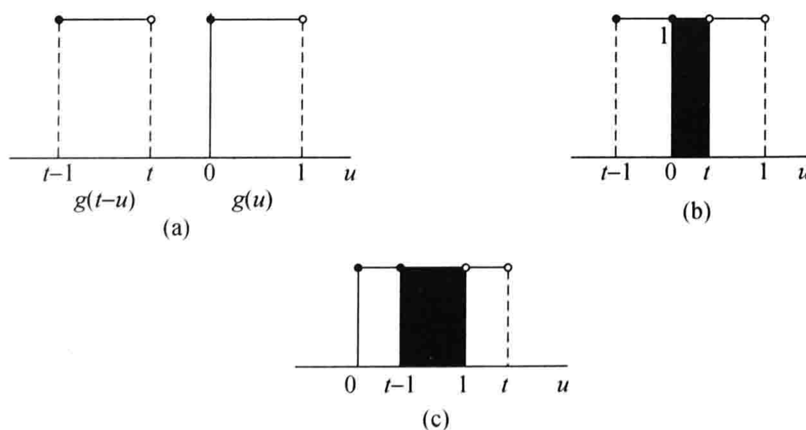


图 6.10 两个箱函数的卷积

(a)$t<0$;(b)$0\leqslant t<1$;(c)$1\leqslant t<2$

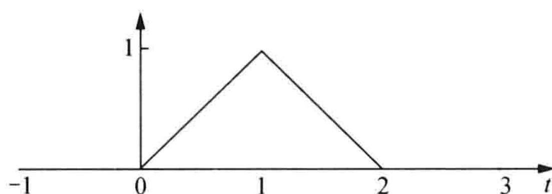


图 6.11　两个箱函数的卷积结果

它们的面积为 $2-t$. 注意 $t=1$ 时,面积仍是 1. 一旦 $t>2$,这两个箱不再重叠,因而卷积为零. 图 6.11 归纳了两个箱函数卷积的结果. 数学上图 6.11 是一个帐篷函数

$$T(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<1, \\ 2-t, & 1\leqslant t<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{6.20}$$

从图 6.11 看出,两个箱函数卷积的结果,在 t 的两个区间[0,1]和[1,2]上都是平滑的直线.

§6.4　小波变换检出 t_0 处信号的突变性

小波变换的独到之处在于它有一个时间(或空间)位置的参数 t_0. 一个多尺度的信号 $f(t)$变化是非常剧烈的. 傅里叶变换中没有这个参数. 由于使用正弦和余弦这种全局的基函数,因而傅里叶变换的结果是使信号 $f(t)$全局铺开,将变化剧烈的信号平滑化了. 而小波变换中的 $g(t)$ 是局域的,可以将 $g(t)$平移到所研究的时间位置 t_0,并按照 a 的大小来调整放大倍数. 这样,信号 $f(t)$在每个时间位置 t_0 上的状况都可以显示出来.

下面我们举一个信号的例子:$f(t)$在一段时间内为常数 1,突然在时间位置 C 处,下降到一个负常数 $f(t)=-1$,见图 6.12(a). 下面我们用墨西哥帽小波来示意说明它为什么能检出 C 处信号的突然变化. 我们将墨西哥帽小波放在时间位置 A 处,由于该处信号是正值,而墨西哥帽的顶部为正值,因此信号对小波的乘积对小波变换的贡献为正,而墨西哥帽的下帽檐部为负,因此信号对小波变换的贡献为负. 我们用"+"号或"－"号标记在图 6.12(b)上表示对小波变换的贡献. 由于"+","－"贡献抵消,因此在 A 处 $T_g=0$,当 A 向 B 处移动时小波变换不断改变它的值. 类似,当墨西哥帽小波移动到 B 处,它们对小波变换贡献的"+","－"号也列在图 6.12(c)上. 从图上看出,离 C 点不远的 B 处对小波变换的贡献是"+". 在由 B 移到 C 的过程中贡献为"+"的值由最大逐渐减小. 但是当把墨西哥帽小波移至突变点 C 处后,C 处左边有"+"贡献,也有"－"贡献,C 处的右边同样有"+"贡献,也有"－"贡献. 一般都要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 0\,, \tag{6.21}$$

即母小波的平均值为零,因此在 C 处的左边和右边,墨西哥帽"+"贡献的面积和"－"贡献的面积相等. 这样,在突变点 C 处,小波变换的值为零,参看

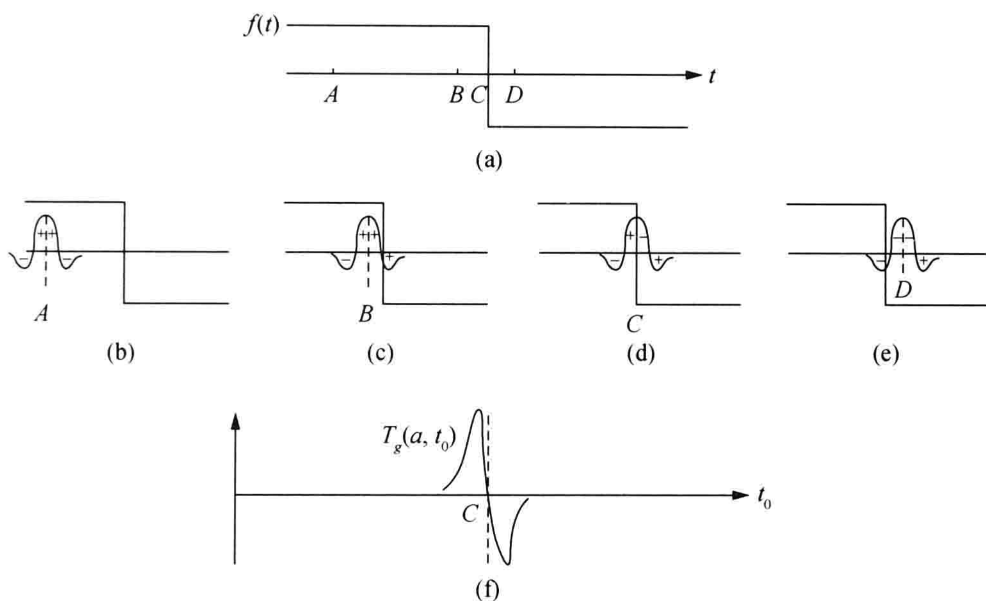


图 6.12 小波变换检出信号突变的示意图

(a) 一个突然下降的信号 $f(t)$；(b)～(e) 信号的不同位置对小波变换的贡献；(f) 在突变点 C 处小波变换的变化

图6.12(d). 而刚刚过了突变点后的 D 处对小波变换积分的贡献有三块"－"，一块"＋"，因此总的是负贡献，见图 6.12(e). 我们将 C 处左右小波变换的变化示意图列在 6.12(f)上. 它说明若用墨西哥帽作为母小波，小波变换由正值穿过零点变成负值(或由负值穿过零点变成正值)，小波变换的零点处就是信号的突变时间. 这再一次说明小波变换中时间位置 t_0 这个参数对描述信号的时间变化是非常重要的. 总之，如果用墨西哥帽作母小波，那么信号小波变换的零点就是突变点.

不同的小波不一定都以小波变换的零点为信号的突变点. 上节列出的四种母小波不外乎分为两种：图 6.5 的(b)和(d)属于孤立波型；图 6.5 的(a)和(c)属于冲击波型. 下面我们来说明，对这两种不同类型的母小波，判别信号突变的方法不同，一个是用小波变换的零点，如图 6.12(f)，另一个是小波变换的最大值.

若用 $\varphi(t)$ 表示高斯函数

$$\varphi(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{6.22}$$

那么(6.3)式中的母小波 $g(t)$ 可以取如下两种中的任何一种，即 $\varphi(t)$ 的一阶导数和 $\varphi(t)$ 的二阶导数：

$$g_1(t) = \frac{d\varphi}{dt} = t e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{6.23}$$

$$g_2(t)=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=(1-t^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{6.24}$$

下面我们来证明(6.3)式中的小波变换 T_g 正比于由 φ 平滑后的函数 $f*\varphi_a$ 的一阶导数(若用 $g_1(t)$ 作为母小波)或二阶导数(若用 $g_2(t)$ 作为母小波),其中

$$\varphi_a(t)=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{(\frac{t}{a})^2}{2}}, \tag{6.25}$$

而

$$f*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(t-u)\mathrm{d}u \tag{6.26}$$

表示卷积. 由(6.3)式,若以 $g_1(t)$ 作为母小波,则

$$\begin{aligned}T_g &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}f(u)g\left(\frac{t-u}{a}\right)\mathrm{d}u\\ &= f*\left(\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{(\frac{t}{a})^2}{2}} = f*\frac{1}{a}g_1\left(\frac{t}{a}\right)\\ &= f*\left(a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)=a\left(f*\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*\varphi_a).\end{aligned} \tag{6.27}$$

同理可以证明,若以 $g_2(t)$ 作为母小波,则

$$T_g=a^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f*\varphi_a). \tag{6.28}$$

在(6.27)式中,我们用了卷积与微分运算可交换的性质.

由(6.27)和(6.28)式,我们可以利用 T_g 的最大值或 T_g 的零点来判断信号 $f(t)$ 的突变点. 图 6.13 中,设想在 t_0 和 t_2 位置上信号 $f(t)$ 发生突变,那么 $f(t)*\varphi_a$ 就相当于把信号进行了平滑,平滑后的信号在 t_0 和 t_2 处就变成了拐点,而根据(6.27)式,小波变换 T_g 正比于 $f*\varphi_a$ 的一阶导数,拐点处的一阶导数最大,所以,若用 $g_1(t)$ 作为母小波,T_g 若是最大值,则时间位置 t_0 和 t_2 就代表信号 $f(t)$ 的突变点,见图 6.13(c). 同理,根据(6.28)式,T_g 正比于 $f*\varphi_a$ 的二阶导数,而拐点处的二阶导数为 0,因此,若用 $g_2(t)$ 作为母小波,T_g 在 t_0 和 t_2 位置上穿过零点,则代表信号 $f(t)$ 在该时间位置上存在突变点,见图 6.13(d). 图 6.12(f)正是用墨西哥帽 $g_2(t)$ 作为母小波,所以 T_g 穿过零点是突变点.

一般来说,多尺度信号 $f(t)$ 的突变现象是普遍的. 在小波变换时,由于有时间位置 t_0 这个参数,就可能根据 T_g 的最大值或零点来判断信号 $f(t)$ 的突变点的时间位置,这对寻找 $f(t)$ 的变化规律和预测均有很大好处.

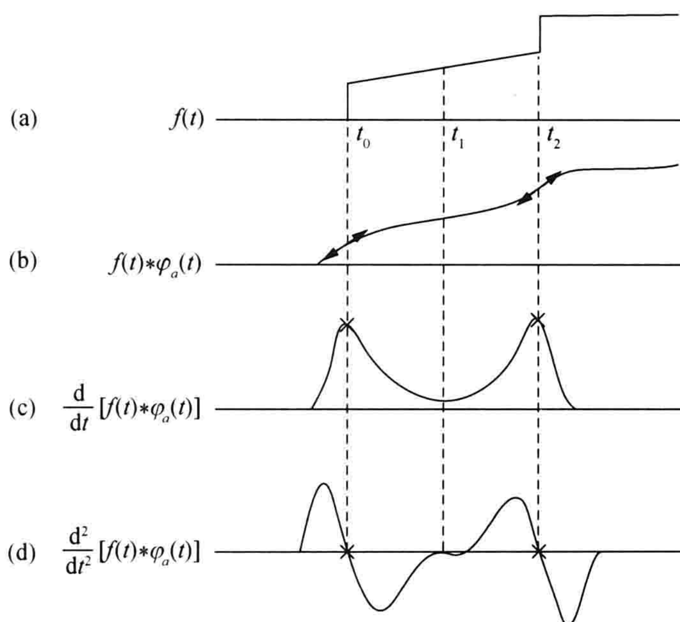


图 6.13　信号 $f(t)$ 突变点的判断

§ 6.5　哈尔标度函数

§ 6.2 已经说明小波变换和分形联系在一起,主要是因为它也具有标度不变性. 下面来看一下哈尔小波(图 6.14).

从图 6.14 的哈尔小波看出,它是两个哈尔标度函数相减的结果:

$$g(t)=\varphi(2t)-\varphi(2t-1)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.29}$$

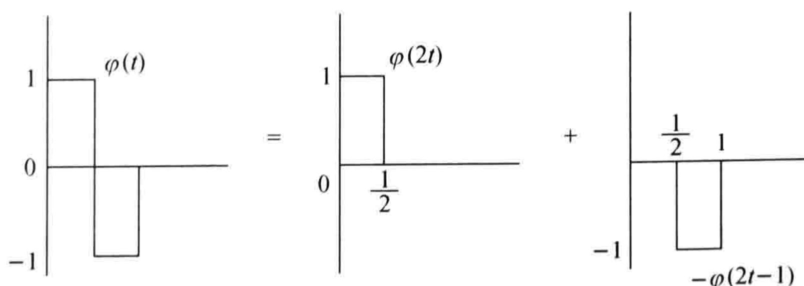


图 6.14　哈尔小波是两个标度函数相减

其中

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{6.30}$$

是哈尔标度函数,它就是箱函数(6.19)式. 由(6.30)式,显然有

$$\varphi(2t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{6.31}$$

因此 $\varphi(2t)$的尺度是 $\varphi(t)$尺度的一半. 而 $\varphi(2t-1)$显然是 $\varphi(2t)$向右移$\frac{1}{2}$的结果.

$$\varphi(2t-1)=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{6.32}$$

由(6.29)式可以得到小波变换(6.3)式中的母小波,表达式中的

$$g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases}1, & t_0\leqslant t<t_0+\frac{a}{2},\\ -1, & t_0+\frac{a}{2}\leqslant t<t_0+a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{6.33}$$

哈尔标度函数 $\varphi(t)$则是它的一半尺度的标度函数 $\varphi(2t)$和 $\varphi(2t-1)$相加的结果,即

$$\varphi(t)=\varphi(2t)+\varphi(2t-1),\tag{6.34}$$

见图 6.15.

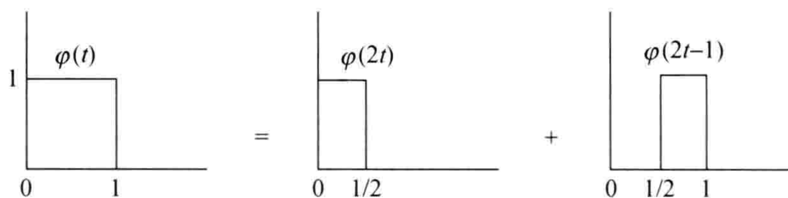


图 6.15 哈尔标度函数是两个标度函数的相加

哈尔标度函数的尺度变换很明显,$\varphi(2t)$的尺度是 $\varphi(t)$的一半,$\varphi(2t-1)$是 $\varphi(2t)$向右移半个单位,因此哈尔标度函数 $\varphi(t)$和哈尔小波 $g(t)$用起来很方便.

§6.6 随机函数的哈尔标度函数表示

分形的特征是处处连续而不可微,而且常常大小不同的涨落都是突跳式的. 图 6.16 显示的是一维随机变量 $x(t)$随时间 t 的变化. 这就使我们想起哈尔标度函数(6.30)式. 函数 $\varphi(t-1),\varphi(t-2),\cdots,\varphi(t-k)$分别是 $\varphi(t)$向右移 $1,2,\cdots,k$ 个单位的函数,所以和图 6.16 类似的函数 $f(t)$(见图 6.17)可以写成

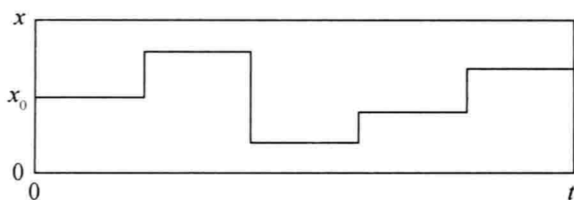


图 6.16 一维随机变量是由一些确定性的突跳函数组成

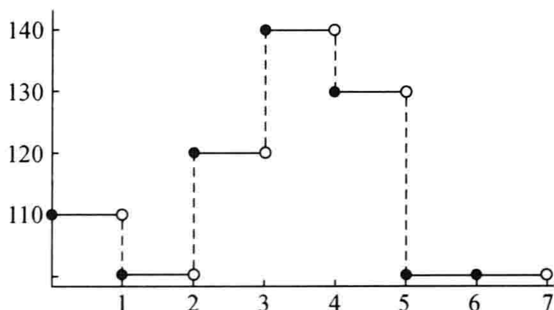


图 6.17 函数 $f(t)$

$$
\begin{aligned}
f(t)=&110\varphi(t)+100\varphi(t-1)+120\varphi(t-2)+140\varphi(t-3)\\
&+130\varphi(t-4)+100\varphi(t-5)+100\varphi(t-6).
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

一般地，$f(t)$可以写成

$$
f(t)=\sum_k a_k\varphi(t-k),
\tag{6.36}
$$

其中 k 是正数，a_k 是系数. 由于当 $j\neq k$ 时，$\varphi(t-j)$和 $\varphi(t-k)$这两个函数永不

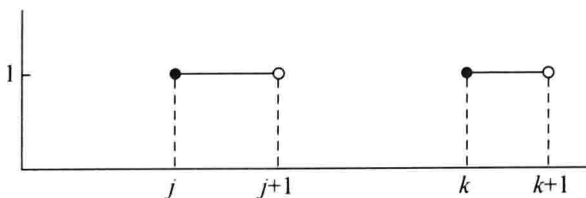


图 6.18 $\varphi(t-j)$和 $\varphi(t-k)(j\neq k)$

相交(见图 6.18)，所以它们的内积

$$
\int\varphi(t-j)\varphi(t-k)\mathrm{d}t=0
\tag{6.37}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&\int\varphi(t-k)\varphi(t-k)\mathrm{d}t\\
&\quad=\int\varphi^2(t-k)\mathrm{d}t\\
&\quad=\int\varphi(t-k)\mathrm{d}t=\int_k^{k+1}1\mathrm{d}t=1,
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

因而函数集合$\{\varphi(t-k)\}$是正交的,且线性无关.

实际上分形的随机函数不必像图 6.17 那样都是由 $\varphi(t)$ 每次平移一个整数单位所组成,也可以每次平移半个整数$\pm\frac{1}{2},\pm 1,\pm\frac{3}{2},\cdots$,甚至平移$\frac{1}{4}$整数,如$\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{4},\cdots$. 为此我们来看函数 $\varphi(2t),\varphi(4t),\cdots$,以及 $\varphi\left(\frac{t}{2}\right),\varphi\left(\frac{t}{4}\right),\cdots$ 的尺度. 由于

$$\varphi(2t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant 2t<1 \text{ 或 } 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.39}$$

所以 $\varphi(2t)$的尺度是 $\varphi(t)$尺度的一半,见图 6.19(a). 同样 $\varphi(4t)=\varphi(2^2t)$是 $\varphi(t)$ 尺度的$\frac{1}{4}$,见图 6.19(b). 类似地,$\varphi\left(\frac{t}{2}\right),\varphi\left(\frac{t}{4}\right)$的尺度分别是 $\varphi(t)$尺度的 2 倍和 4 倍,见图 6.19(c),(d). 由于

$$\varphi(2t-1)=\varphi\left[2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right], \tag{6.40}$$

所以 $\varphi(2t-1)$是 $\varphi(2t)$向右移半个单位. 一般地,$\varphi(2t-k)$是 $\varphi(2t)$向右移$\frac{k}{2}$个单位(当 k 是正整数)或向左移$\frac{k}{2}$个单位(当 k 是负整数).

图 6.20(a),(b),(c),(d)分别是函数

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 3\varphi\left(\frac{1}{8}+1\right)+2\varphi\left(\frac{t}{8}-1\right)+\varphi\left(\frac{t}{8}-2\right),\\ f_2(t) &= \sum_{k=-1}^{2}k^2\varphi\left(\frac{t}{2}-k\right),\\ f_3(t) &= -2\varphi(2t+3)+\varphi(2t)-3\varphi(2t-1)+3\varphi(2t-4),\\ f_4(t) &= \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\varphi(16t-k)\end{aligned} \tag{6.41}$$

的图像. 函数 f_1 中 $\varphi\left(\frac{t}{8}\right)$表示尺度是 $\varphi(t)$的 8 倍. $\varphi\left(\frac{t}{8}+1\right)=\varphi\left(\frac{1}{8}(t+8)\right)$表示 $\varphi\left(\frac{t}{8}\right)$向左移 8 个单位. $\varphi\left(\frac{t}{8}-1\right)$是 $\varphi\left(\frac{t}{8}\right)$向右移 8 个单位. $\varphi\left(\frac{t}{8}-2\right)=\varphi\left(\frac{1}{8}(t-16)\right)$是 $\varphi\left(\frac{t}{8}\right)$向右移 16 个单位. 函数 f_2 中的 $\varphi\left(\frac{t}{2}+1\right),\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$和 $\varphi\left(\frac{t}{2}-1\right),\varphi\left(\frac{t}{2}-2\right)$,它们的尺度都是 $\varphi(t)$ 的 2 倍,$\varphi\left(\frac{t}{2}+1\right),\varphi\left(\frac{t}{2}-1\right)$,$\varphi\left(\frac{t}{2}-2\right)$分别是 $\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$向左移 2 个单位、向右移 2 个单位和右移 4 个单位. f_3

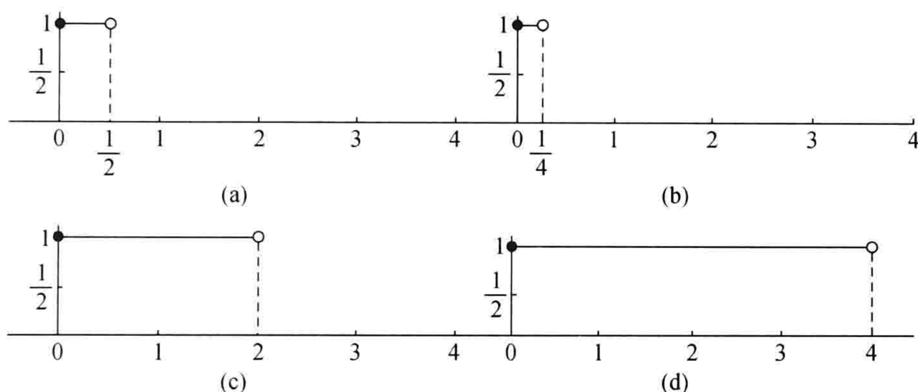


图 6.19

(a) $\varphi(2t)$;(b) $\varphi(4t)$;(c) $\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$;(d) $\varphi\left(\frac{t}{4}\right)$

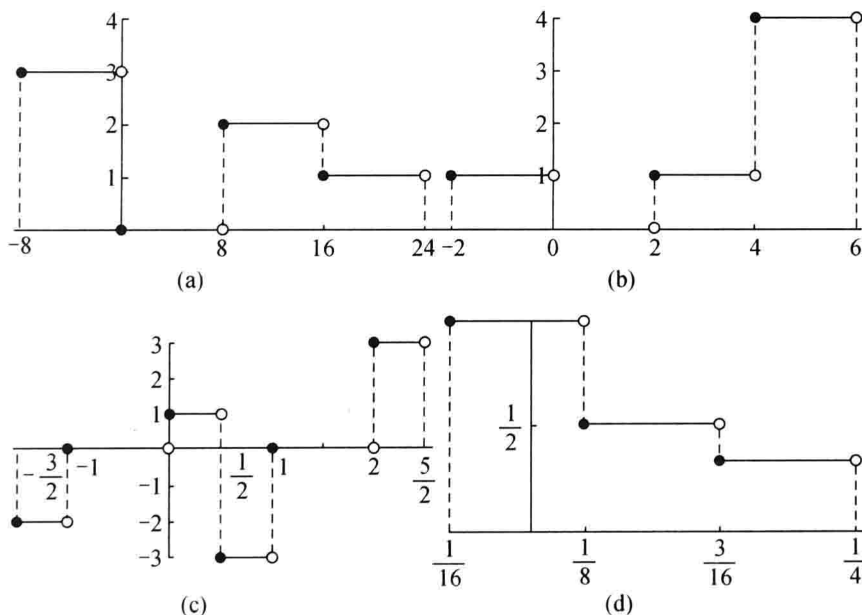


图 6.20

(a) $f_1(t)$;(b) $f_2(t)$;(c) $f_3(t)$;(d) $f_4(t)$

中的 $\varphi(2t)$ 的尺度是 $\varphi(t)$ 的一半. $\varphi(2t+3)=\varphi\left[2\left(t+\frac{3}{2}\right)\right]$ 是 $\varphi(2t)$ 向左移 $\frac{3}{2}$ 个单位. 类似地,$\varphi(2t-1)$ 和 $\varphi(2t-4)$ 分别是 $\varphi(2t)$ 向右移半个单位和 2 个单位. f_4 中的 $\varphi(16t)$ 表示尺寸是 $\varphi(t)$ 的 $\frac{1}{16}$. $\varphi(16t-1)$,$\varphi(16t-2)$,$\varphi(16t-3)$ 表示 $\varphi(16t)$ 分别向右移 $\frac{1}{16}$,$\frac{1}{8}$ 和 $\frac{3}{16}$ 个单位.

和(6.37)式类似,当 $k\neq l$ 时,$\varphi(2^j t-k)$ 和 $\varphi(2^j t-l)$ 是正交的,所以 $f(t)$ 可以表示成

$$f(t)=\sum_k a_k\varphi(2^jt-k). \tag{6.42}$$

将(6.42)和(6.36)比较看出,现在(6.42)中的尺度是 $\varphi(t)$ 尺度的 $\frac{1}{2^j}$,而(6.36)中 $\varphi(t)$ 的尺度是 $\frac{1}{2^0}=1$.

从图 6.20 的横坐标看出,图中的四个函数在(6.42)式中的 j 分别是 $j=-3, j=-1, j=1$ 和 $j=4$. 它们的尺度分别是 $\varphi(t)$ 尺度的 8 倍,2 倍,$\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{16}$ 倍.

为了使正交函数 $\varphi(2^jt-k)$ 归一化,常常以

$$\varphi_{j,k}=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k) \tag{6.43}$$

来代替 $\varphi(2^jt-k)$,此时,

$$\|\varphi_{j,k}(t)\|^2=2^j\|\varphi(2^jt-k)\|^2=2^j\cdot 2^{-j}=1.$$

同样,对于哈尔小波函数(6.29),我们定义

$$g_{j,k}(t)=2^{\frac{j}{2}}g(2^jt-k) \tag{6.44}$$

为新的哈尔小波函数. 由(6.29),我们得到

$$2^{\frac{j}{2}}g(2^jt-k)=\begin{cases}\frac{j}{2}, & 0\leqslant 2^jt-k<\frac{1}{2},\\ -\frac{j}{2}, & \frac{1}{2}\leqslant 2^jt-k<1,\\ 0, & 其他.\end{cases} \tag{6.45}$$

我们将(6.45)式中右端第一个不等式每项加上 k,得到

$$k\leqslant 2^jt<\frac{1}{2}+k,$$

即

$$2^{-j}k\leqslant t<2^{-j}k+2^{-(j+1)}.$$

同样,(6.45)式第二个不等式也有

$$2^{-j}k+2^{-(j+1)}\leqslant t<2^{-j}k+2^{-j}.$$

这样,(6.45)式可重写成

$$g_{j,k}(t)=\begin{cases}\frac{j}{2}, & 2^{-j}k\leqslant t<2^{-j}k+2^{-(j+1)},\\ -\frac{j}{2}, & 2^{-j}k+2^{-(j+1)}\leqslant t<2^{-j}k+2^{-j},\\ 0, & 其他.\end{cases} \tag{6.46}$$

下面举三个例子.

(1)取

$$g_{1,-2}(t)=2^{\frac{1}{2}}g(2^1t+2)=\sqrt{2}g(2(t+1)). \tag{6.47}$$

它表示 $g(t)$ 的尺度收缩一半,然后向左移一个单位,见图 6.21(a).

(2)取

$$g_{-2,4}(t)=2^{-\frac{2}{2}}g\left(\frac{t}{4}-4\right)=\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{4}(t-16)\right). \tag{6.48}$$

它表示 $g(t)$尺度放大 4 个单位,然后向右移 16 个单位,见图 6.21(b).

(3)取

$$g_{4,-5}(t)=2^{\frac{4}{2}}g(16t+5)=4g\left(16\left(t+\frac{5}{16}\right)\right). \tag{6.49}$$

它表示 $g(t)$尺度收缩 16 倍,然后向左移$\frac{5}{16}$个单位,见图 6.21(c).

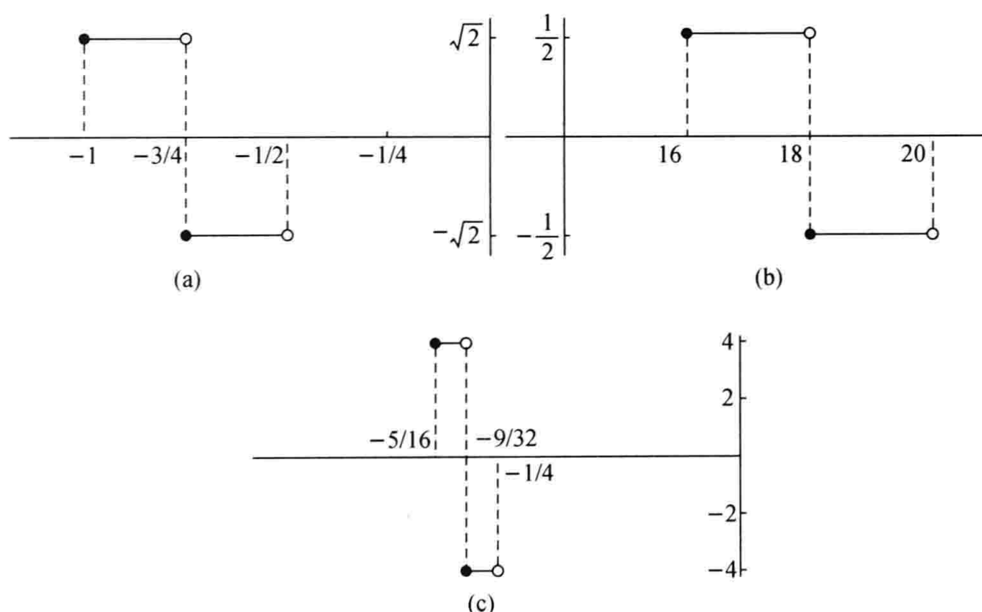


图 6.21 三个 $g(t)$函数的图像

(a) $g_{1,-2}(t)$;(b) $g_{-2,4}(t)$;(c) $g_{4,-5}(t)$

这样,任何函数都可以按小波函数 $g_{j,k}$展开,例如

$$\begin{aligned}f_1(t)&=2g_{-2,-1}(t)-6g_{-2,1}(t)+4g_{-2,2}(t)\\&=g\left(\frac{t}{4}+1\right)-3g\left(\frac{t}{4}-1\right)+2g\left(\frac{t}{4}-2\right),\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}f_2(t)=&16g\left(8\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)-9g\left(8\left(t+\frac{3}{8}\right)\right)+4g\left(8\left(t+\frac{1}{4}\right)\right)\\&-g\left(8\left(t+\frac{1}{8}\right)\right),\end{aligned} \tag{6.51}$$

见图 6.22.

在(6.36)和(6.42)式中,若系数 a_k 是一种随机分布的函数序列,那么就可以得到一个随机函数. 正是(6.36)式和(6.42)式中函数 φ 的局部性使这种展开

比较“经济”,只要较少量的几个基底就能描述 $f(t)$ 了.

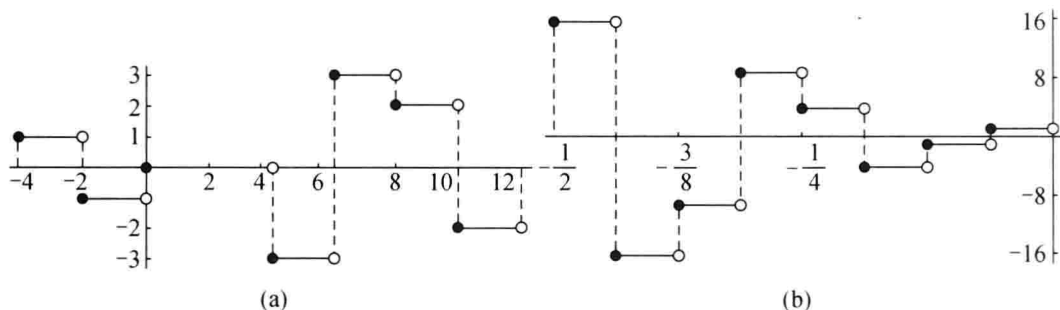


图 6.22 函数的小波展开

(a) $f_1(t)$;(b) $f_2(t)$

§6.7 哈尔标度函数表示分形

哈尔标度函数(6.30)式的 $\varphi(t)$ 既具有尺度伸缩的功能,又具有平移的功能,这当然是拥有自相似结构的分形现象的特点,因此许多分形现象能用哈尔标度函数来表达.

大家知道,康托尔集合的原来尺度是1,而后来分出来的尺度各为 $\frac{1}{3}$. 因为 $\varphi(3t)$ 就是 $\varphi(t)$ 尺度的 $\frac{1}{3}$,且 $\varphi(3t-2)$ 就是将原来 $\frac{1}{3}$ 尺度区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 向右移 $\frac{2}{3}$ 的结果,所以康托尔集合就可以用哈尔标度函数表示为

$$\varphi(t)=\varphi(3t)+\varphi(3t-2). \tag{6.52}$$

由(6.30)式,有

$$\varphi(3t)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant 3t<1\left(\text{即 } 0\leqslant t<\frac{1}{3}\right),\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.53}$$

$$\varphi(3t-2)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant 3t-2<1\left(\text{即 } \frac{2}{3}\leqslant t<1\right),\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.54}$$

所以(6.52)式中的右端正好是康托尔集合的第一次分割.

若在(6.52)式中令变换 $t\to 3t$,则有

$$\varphi(3t)=\varphi(9t)+\varphi(9t-2). \tag{6.55}$$

(6.55)式右端第一项的尺度是 $\varphi(t)$ 的 $\frac{1}{9}$,右端第二项是将第一项向右移 $\frac{2}{9}$ 个单位,因此

$$\varphi(9t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{9},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{6.56}$$

$$\varphi(9t-2)=\begin{cases}1, & \dfrac{2}{9}\leqslant t<\dfrac{1}{3},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(6.56)式的右端就代表$\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$段所分出的两段$\left[0,\dfrac{1}{9}\right]$和$\left[\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{3}\right]$.

若将(6.52)式中的 t 改成 $3t-2$,得到

$$\varphi(3t-2)=\varphi(9t-6)+\varphi(9t-8),\tag{6.57}$$

那么(6.57)式右边第一项和第二项分别是

$$\varphi(9t-6)=\begin{cases}1, & \dfrac{2}{3}\leqslant t<\dfrac{7}{9},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{6.58}$$

$$\varphi(9t-8)=\begin{cases}1, & \dfrac{8}{9}\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此(6.58)式就是$\left[\dfrac{2}{3},1\right]$段所分出的两段$\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{9}\right]$和$\left[\dfrac{8}{9},1\right]$. (6.56)和(6.58)合起来正是康托尔集合第二次分裂出的长度为$\dfrac{1}{9}$的四段. 以此类推,康托尔集合均可以用标度函数来表示.

§6.8 二维哈尔标度函数

我们将一维哈尔标度函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{6.59}$$

推广到二维,得到二维哈尔标度函数(也称为阶跃函数)

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{6.60}$$

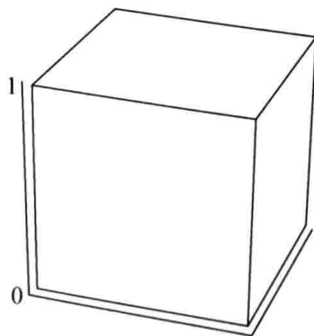


图 6.23 二维标度函数建筑块

见图 6.23. 它就像一个方形的积木块. 和一维类似,尺度是 $\varphi(x,y)$一半的积木块

$$\varphi(2x,2y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},0\leqslant y<\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{6.61}$$

$$\varphi(2x,2y-1)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.62}$$

$$\varphi(2x-1,2y-1)=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.63}$$

$$\varphi(2x-1,2y)=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,0\leqslant y<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{6.64}$$

构成二维分形信号 $f(x,y)$ 的基本建筑块,见图 6.24. 一个二维函数

$$\begin{aligned}f(x,y)=&9\varphi(2x,2y)+7(2x,2y-1)\\&+5\varphi(2x-1,2y)+3\varphi(2x-1,2y-1)\end{aligned} \tag{6.65}$$

的图像见图 6.25. 若用一个矩阵表示函数(6.65),应为

$$\begin{pmatrix}9 & 7\\ 5 & 3\end{pmatrix}. \tag{6.66}$$

在表达式(6.65)中所有四项的尺度都是 $\varphi(x,y)$ 的一半,右边第二项是 y 方向将 $\varphi(2x,2y)$ 向前移半个单位,右边第三项是 $\varphi(2x-1,2y)$ 在 x 方向向右移半个单位,右边第四项是 $\varphi(2x-1,2y-1)$ 在 x 和 y 方向向前移半个单位.

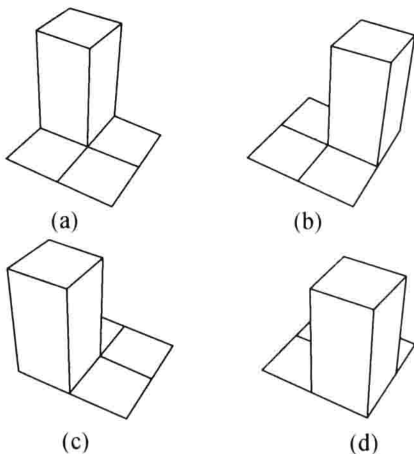


图 6.24　二维基本建筑块

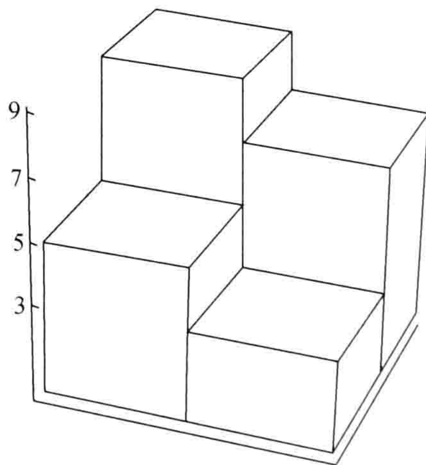


图 6.25　函数(6.65)的建筑块

该矩阵的第一行表示 x 方向,第二行表示 y 方向. 第一行第一个元素表示尺度为 $\frac{1}{2}$ 的标度函数 $\varphi(2x,2y)$,矩阵的其他元素的标度函数都是第一个标度函数向右移或向前移动的结果.

二维小波函数 $g(x,y)$ 类似于前面二维标度函数 $\varphi(x,y)$ 的构造,由 x 方向的一维哈尔标度函数和另一维 y 方向的哈尔小波相乘得到. 例如,由(6.30)式

和(6.29)式,

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.67}$$

$$g(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.68}$$

那么二维哈尔小波函数为

$$g(x,y)=\varphi(x)g(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<\frac{1}{2},\\ -1, & 0\leqslant x<1,\frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.69}$$

见图 6.26(a). 这种二维小波很像一个二维台阶式的积木块.

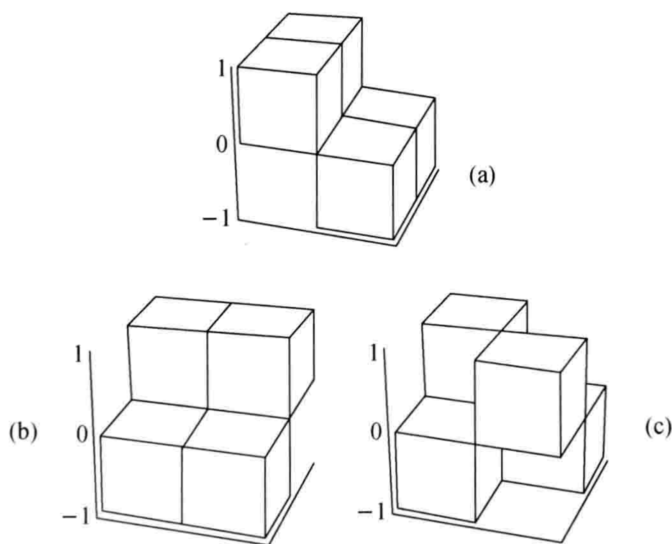


图 6.26 二维哈尔小波建筑块

又如,将 $g(x)$ 和 $\varphi(y)$ 相乘,得到

$$g(x,y)=g(x)\varphi(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},0\leqslant y<1,\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.70}$$

见图 6.26(b). 它也像一个二维台阶.

再如,将 $g(x)$ 和 $g(y)$ 相乘,得到

$$g(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},0\leqslant y<\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,0\leqslant y<\frac{1}{2},\\ -1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{6.71}$$

见图 6.26(c). 这种二维小波好像从前面上台阶,然后又从上面下台阶. (6.69)～(6.71)式的三种二维小波函数都是局部冲击波形式的小波,图中积木块外的函数值均为零. 函数(6.65)式右端的尺度都仅是 $\varphi(x,y)$ 的 $\frac{1}{2}$,但是如果函数 $f(x,y)$ 都是 $\varphi(x,y)$ 的尺度的 $\frac{1}{4}$,例如图 6.27 的一个函数 $f(x,y)$,我们可以用矩阵表示为

图 6.27　一个二元函数 $f(x,y)$

$$\begin{pmatrix}9&7&6&2\\5&3&4&4\\8&2&4&0\\6&0&2&2\end{pmatrix}.\tag{6.72}$$

由于尺度都是 $\varphi(x,y)$ 的 $\frac{1}{4}$,所以矩阵(6.72)对应的标度函数为

$$\begin{pmatrix}\varphi(4x,4y) & \varphi(4x-1,4y) & \varphi(4x-2,4y) & \varphi(4x-3,4y)\\ \varphi(4x,4y-1) & \varphi(4x-1,4y-1) & \varphi(4x-2,4y-1) & \varphi(4x-3,4y-1)\\ \varphi(4x,4y-2) & \varphi(4x-1,4y-2) & \varphi(4x-2,4y-2) & \varphi(4x-3,4y-2)\\ \varphi(4x,4y-3) & \varphi(4x-1,4y-3) & \varphi(4x-2,4y-3) & \varphi(4x-3,4y-3)\end{pmatrix}.\tag{6.73}$$

§6.9　小波变换的最大值

从图 6.13 看出,若用 $g_1(t)$ 作为母小波,小波变换的最大值代表物理状态转换的突变点,因此常用小波变换的模 $|T_g(a,t_0)|$ 的最大值来研究. 在(6.4)式中我们说明,若函数 $f(t)$ 是自相似的标度函数,那么它的小波变换也是自相似的. 现在我们说明,若 $f(t)$ 是带权重 p_i 自相似的,即

$$f(t)=p_i f(\lambda_i t), \tag{6.74}$$

那么小波变换的位置以及它的模最大值也是自相似的.

将(6.74)式代入小波变换的(6.3)式,得

$$\begin{aligned} T_g(a,t_0) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} p_i f(\lambda_i t) g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

令 $t'=\lambda_i t$,则得到

$$\begin{aligned} T_g(a,t_0) &= \frac{p_i}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t') g\left(\frac{t'-\lambda_i t_0}{\lambda_i a}\right)\frac{1}{\lambda_i}\mathrm{d}t' \\ &= \frac{p_i}{\lambda_i a} T_g(\lambda_i a, \lambda_i t_0). \end{aligned} \tag{6.75}$$

从(6.75)式看出,位置 t_0 和 $\max(T_g(a,t_0))$ 也都具有自相似关系. 这样我们就可以用小波变换模最大值来揭示函数的标度性质.

传统的康托尔集合和迭代函数系(见(2.29)式)相联系,见图 2.13. 若设原来的长度为 1 的康托尔集合的质量就是 1,则其一小段 $\mathrm{d}x$ 的质量为

$$\mathrm{d}\mu_0 = 1\mathrm{d}x, \tag{6.76}$$

整个棒的质量就是

$$\mu_0 = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1. \tag{6.77}$$

若把这个线段分成两段$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3},1\right]$,则它们的质量分别为

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int_0^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}\mu_1 = p_1, \\ \mu_1 &= \int_{\frac{2}{3}}^{1} \mathrm{d}\mu_1 = p_2, \end{aligned} \tag{6.78}$$

且

$$p_1 + p_2 = 1. \tag{6.79}$$

这样不断分下去,各个层次的康托尔集合的质量分别为 p^2, p_1p_2, p_2p_1 和 ${p_2}^2$,见图 6.28. 图 6.28 中 $\mathrm{d}\mu_0$, $\mathrm{d}\mu_1$, $\mathrm{d}\mu_2$, … 是康托尔集合各层次每一小段的测度.

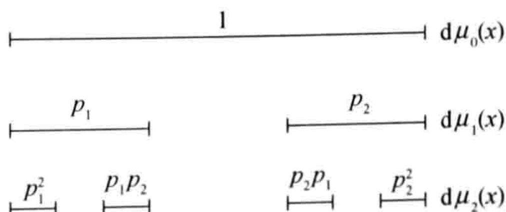


图 6.28 带有权重的康托尔集合测度

康托尔测度的魔鬼楼梯函数为

$$f(t) = \int_0^t \mathrm{d}\mu_\infty(x) , \tag{6.80}$$

其中 $\mathrm{d}\mu_\infty$ 是康托尔集合区间分为∞个小段时测度. 图 6.29(a)的上图是取 $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$ 计算出的魔鬼楼梯. 图中横坐标是 t,纵坐标是 $f(t)$.

由于 $f(t)$是连续函数,且具有自相似性

$$f(t)=\begin{cases} p_1 f(3t), & 若\ t\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right], \\ p_1, & 若\ t\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right], \\ p_1+p_2 f(3t-2), & 若\ t\in\left[\dfrac{2}{3},1\right], \end{cases} \tag{6.81}$$

那么 $f(t)$的小波变换和模最大值也是自相似的. 图 6.29(a)的下图是用(6.9)

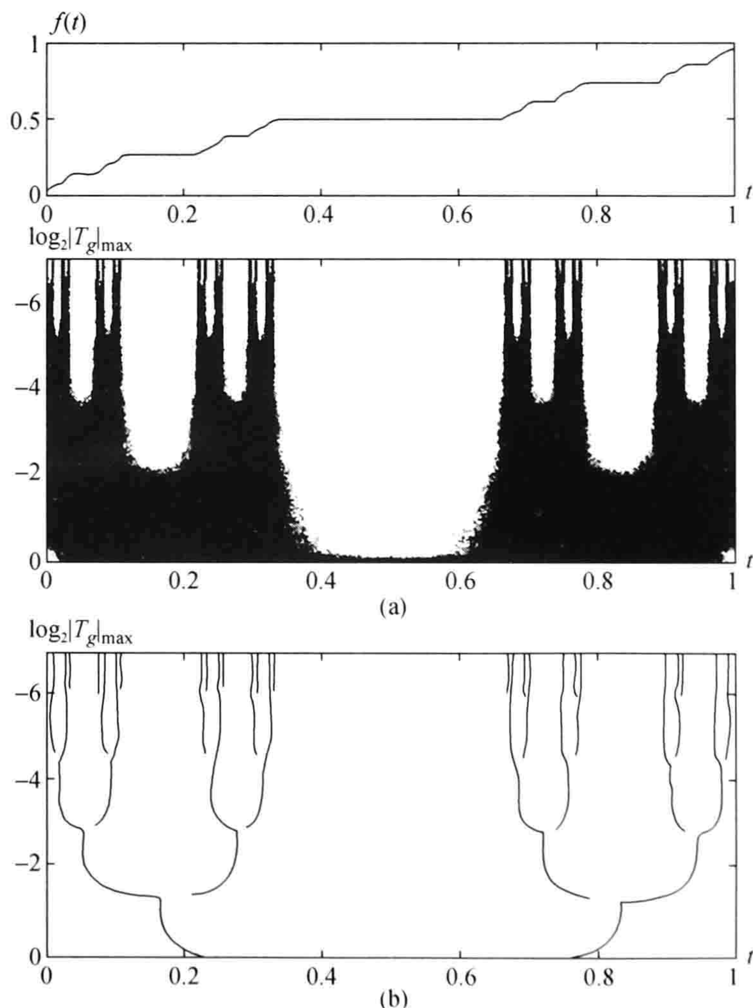


图 6.29　康托尔集合的魔鬼楼梯及其(a)小波变换,(b)小波变换模最大值

式的母小波对 $f(t)$ 所做的小波变换. 图 6.29(b)是小波变换的模最大值线. 从图上看出,纵坐标中显示,当尺度减小 3 倍,即对 $f(3t)$,最大值线的数目增加两倍. 由于魔鬼楼梯 $f(t)$ 的各台阶的突变性很容易通过(6.9)式作为母小波的小波变换求得的,所以图 6.29(b)的最大值线正反映康托尔集合一分为二的转换点.

小　　结

小波变换具有标度不变性,这和分形的特征相一致. 小波变换比傅里叶变换多了一个时间位置参数,可以用来判别函数的突变点. 哈尔标度函数对尺度有很简洁的表示,因而是分形函数的简单表示式.

第七章　多 重 分 形

分形现象不但在几何性质(如长度、面积、体积等)上是多尺度,而且在物理量上也是多尺度的. 例如,气候变暖还是变冷是和时间尺度的长短分不开的,而且冷或暖的程度(温度)也是差别很大的. 又例如,全球的地下水区域分布是不均匀的,是多尺度的,而且地下水量也是很不均匀的. 因此,在描述分形时,我们必须将几何与测度相联系,这就形成了多重分形.

§7.1　多重分形的来源及其描述方法

我们在第二章描述过了康托尔集合,它和迭代映射(2.29)式相联系:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n = w_1(x_n), \quad p_1 = \frac{1}{2}, \\ x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}w_2(x_n), \quad p_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

为了说明均匀和不均匀康托尔集合的区别,我们把长度 $r_0=1$ 的直线设想成质量为 $p_0=1$ 的均匀棒. 第一步将棒切成两半,每一部分的质量为 $p_1=p_2=\frac{1}{2}$,标注在(7.1)式的右边,然后再将它们锤成长度 r_1 各为$\frac{1}{3}$的棒,这样原来均匀棒的线密度 $\rho_0=\frac{p_0}{r_0}=\frac{1}{1}=1$ 就变成了线密度 $\rho_1=\frac{p_1}{r_1}=\frac{1/2}{1/3}=\frac{3}{2}$的两段长度为$\frac{1}{3}$的小棒子. 如此重复分下去,就得到密度不断增加、长度不断减小的康托尔集合棒(见图 7.1(a),图中棒的高度表示密度). 这种康托尔集合棒不但区间长度不断缩小,而且棒的线密度不断增加. 对于图 7.1(a)的均匀棒,我们设每一小段的质量为

$$p_n = r_n{}^{\alpha}, \tag{7.2}$$

由于第 n 段的长度为 3^{-n},质量为$\left(\frac{1}{2}\right)^n$,代入(7.2)式,得到每一小段的质量标度指数为

$$2^{-n} = \frac{1}{N} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}, \tag{7.3}$$

其中 N 是小棒的个数. 所以按分数维的定义(2.8)式,求出康托尔集合棒的维数为

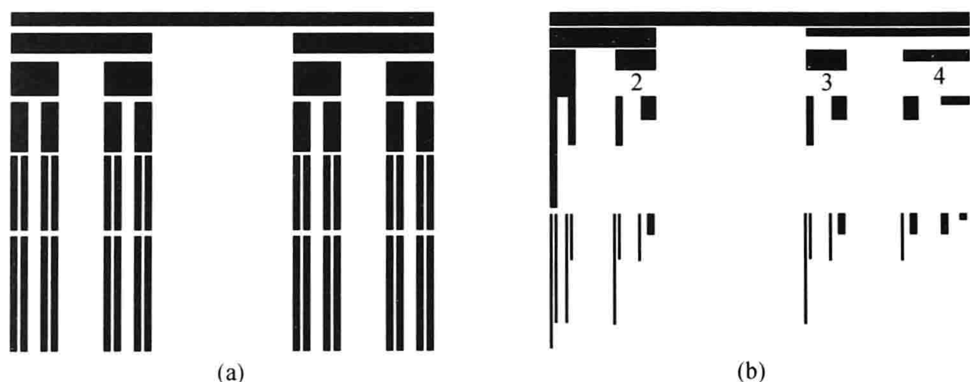


图 7.1 康托尔集合棒

(a) 均匀;(b) 不均匀

$$D=\frac{\ln N(r)}{\ln\frac{1}{r}}=\frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{7.4}$$

又设段数的标度指数为 $-f(\alpha)$,即

$$N_n=r_n{}^{-f(\alpha)}, \tag{7.5}$$

容易得到

$$2^n=(3^{-n})^{-f(\alpha)},$$

求出

$$f(\alpha)=\frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{7.6}$$

(7.3),(7.4),(7.6)式的数值都相同,这意味着对于均匀康托尔棒只要用一个维数(7.4)来描述就可以了. 但是,若在将最初的均匀棒分成两段时每段的长度和质量度不一样,例如左段长度 $r_1=0.5$,质量 $p_1=0.6$,右段长度 $r_2=0.4$,质量为 $p_2=1-p_1=0.4$,如此重复下去会形成图 7.1(b)的不均匀的康托尔集合棒. 从图 7.1(b)看出,此时不是只用一个标度指数 α,一个段数的标度指数 $f(\alpha)$和一个维数 D 就能描述的,必须要用多个维数才能将这种不均匀的康托尔集合棒描述清楚.

图 7.1(b)中的 1,2,3,4 小段的质量分布是

$$p_1^2,\ p_2p_1,\ p_1p_2,\ p_2^2. \tag{7.7}$$

为了反映这种质量的不均匀分布,我们使用质量的 q 阶矩:

$$\sum_i p_i{}^q 6\propto r^{\tau(q)}, \tag{7.8}$$

其中 $\tau(q)$是质量 q 阶矩的标度指数. 每一小段质量按(7.2)式为 $p=r^\alpha$,共有 N 段,那么(7.8)式可以写成积分

$$\sum_i p_i{}^q = \int (r^\alpha)^q N\rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int r^{\alpha q} r^{-f(\alpha)} \rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha \propto r^{\tau(q)}, \tag{7.9}$$

其中 $\rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 是 $\mathrm{d}\alpha$ 小段的质量. 当 $r\to 0$ 时,对上面积分贡献最大的是 $\alpha q - f(\alpha)$ 的最小项,即

$$\tau(q) = \min_\alpha(\alpha q - f(\alpha)), \tag{7.10}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}\tau(q)}{\mathrm{d}\alpha} = q - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{7.11}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha} = q, \tag{7.12}$$

则

$$\begin{aligned} &\tau(q) = \alpha(q)q - f(\alpha(q)), \\ &\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}q} = \alpha(q) + q\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

由(7.12)式,上式是

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}q} = \alpha(q). \tag{7.14}$$

(7.14),(7.12)和(7.13)式是描述分段质量标度指数 α,段数标度指数 f 和质量 q 阶矩标度指数 $\tau(q)$ 的关系式.

将第二章的分数维的定义

$$D = \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{r}} \tag{7.15}$$

加以推广,得到

$$D_q = \frac{\frac{1}{1-q}\ln\sum_{i=1}^{N} p_i{}^q}{\ln\frac{1}{r}}, \tag{7.16}$$

其中 D_q 称为广义维数. 对于均匀分布的分形,由(7.3)式知 $P_i = \frac{1}{N}$,(7.16)式当 $q=0$ 时,有

$$D_0 = \frac{\ln\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^0}{\ln\frac{1}{r}} = \frac{\ln N}{\ln\frac{1}{r}},$$

这就是(7.15)式的通常的分数维. 当 $q=1$ 时,利用洛必达法则得到

$$D_1=\frac{-\sum_{i=1}^{N}P_i\ln P_i}{\ln\frac{1}{r}}.$$

D_1 称为信息维. 将(7.8)式代入(7.16)式,得

$$D_q=\frac{\frac{1}{1-q}\ln(r^{\tau(q)})}{\ln\frac{1}{r}}=\frac{\ln r^{\frac{\tau(q)}{1-q}}}{\ln\frac{1}{r}}$$

$$=\frac{\tau(q)}{q-1}. \tag{7.17}$$

(7.17)式说明,对于非均匀的分形客体要用 q 个维数来描述.

我们在这里要说明参量 α,$f(\alpha)$,τ_q 和 D_q 的含义. 由(7.5)式知,$f(\alpha)$ 就相当于几何段数不均匀的标度指数. 对均匀的康托尔集合,我们只用一个数就够了. 由(7.2)式知,α 是质量这个测度的标度指数,它反映的是物理量(质量)的不均匀的性质. q 本身是 q 阶矩的阶数,正如已知概率密度 $p(x)$,那么随机变量 x 的 q 阶矩表达式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^q p(x)\mathrm{d}x. \tag{7.18}$$

q 愈大,愈反映出随机变量 x 的细节. 一阶矩($q=1$)代表平均值,二阶矩($q=2$)代表方差 σ^2. 在这里 q 是由 $-\infty$ 到 $+\infty$,也反映出质量分布的极其不均匀.

表 7.1 给出了 τ,α,f,D_q 在 $q=0,1,\pm\infty$ 的值.

表 7.1 $\tau(q)$,$\alpha(q)$,$f(\alpha)$ 在 $q=0,1,\pm\infty$ 处的值

q	$\tau(q)$	$\alpha=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}q}$	$f(\alpha)=\alpha q-\tau(q)$	D_q
$-\infty$	$q\alpha_{\max}$	$\alpha_{\max}$	0	$\alpha_{\max}$
0	$-D$	α_0	$f_{\max}=D$	D
1	0	$\alpha_1=\frac{-\sum_i P_i\ln P_i}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$	$f(\alpha_1)=\alpha_1$	D_1
$+\infty$	$q\alpha_{\min}$	$\alpha_{\min}$	0	$\alpha_{\min}$

图 7.2 绘出了 $f(\alpha)$ 对 α 的常见图像,可以将(7.8)到(7.17)的结果显示出来.

(1) 曲线上每一点的斜率按(7.12)式等于 q,斜率直线的截距按(7.13)式就是 $-\tau$. 图 7.2 中曲线顶点的斜率为零,即 $q=0$. 顶点的左边曲线斜率 $q>0$,曲

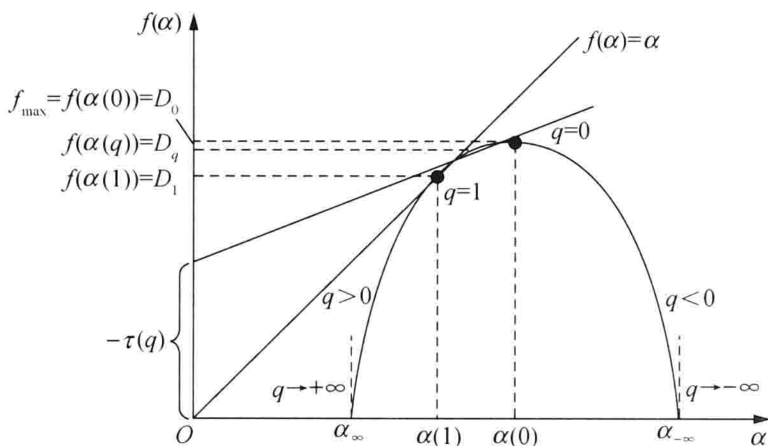


图 7.2 多重分形 $f(\alpha)$ 的图像

线右边 $q<0$，曲线和横轴的两段交点的斜率分别对应于 $q\to+\infty$ 和 $q\to-\infty$.

（2）和斜率 q 对应的图 7.2 的横轴值就是 $\alpha(q)$. 例如斜率 $q=1$ 和曲线的交点的横坐标就是 $\alpha(1)$. 由(7.17)式 $\tau(1)=0$. 由(7.13)式 $f(\alpha(1))=\alpha(1)$，且

$$\frac{\mathrm{d}[f(\alpha(1))-\alpha]}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}f(\alpha(1))}{\mathrm{d}\alpha}-1=q-1=0,$$

所以曲线 $f(\alpha)$ 和直线 $f(\alpha)=\alpha$ 相切.

（3）由(7.8)式，$q=1$ 时 $\tau(1)=0$，因而总质量 $\sum_i p_i=1$. 再由 $\tau(1)=0$，$f(\alpha(1))=\alpha(1)$，按照(7.14)式和(7.17)式，

$$D(1)=\left.\frac{\tau(q)}{q-1}\right|_{q=1}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}q}}{1}\right|_{q=1}=\alpha(1).$$

因此，图 7.3 中 $q=1$ 点的纵坐标是 $f(\alpha(1))=\alpha(1)=D_1$. 同理，$q=0$ 时，按(7.13)式 $\tau(0)=-f(\alpha(0))$，它是 $f_{\max}$，且按(7.17)式 $\tau(0)=-D_0$，所以 $f(\alpha(0))=D_0$.

（4）将(7.17)式代入(7.13)式，得 $(q-1)D_q=q\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}q}-f(\alpha(q))=qD_q-f\alpha(q)$，所以 $f(\alpha(q))=D_q$，即图 7.3 的纵坐标是 $f(\alpha(q))=D_q$.

（5）由于 $f(\alpha_{+\infty})=f(\alpha_{-\infty})=0$，由图 7.2 看出

$$\alpha_{+\infty}=\alpha_{\min},\quad \alpha_{-\infty}=\alpha_{\max}. \tag{7.19}$$

按(7.2)式，当 $r\to0$ 时，$\alpha_{\min}=\alpha_{+\infty}$ 和 $\alpha_{\max}=\alpha_{-\infty}$ 分别相当于质量(或涨落)最强和最弱的标度指数，或 $\alpha_{\min}$，$\alpha_{\max}$ 分别对应于最强或最弱的极值事件.

以上结果说明，对于非均匀的分形必须要用多个维数 D_q 来描述. 这个例子中测度 p_i 代表棒的质量，在其他情况下也可以代表其他物理量.

§7.2 两尺度康托尔集合的配分函数

为了研究不均匀的多重分形维数，我们考虑了两种尺度(标度)的康托尔集合. 这种物理量被分成两种不同状态的做法具有代表性.

对于不均匀康托尔集，左边和右边不再是$\frac{1}{3}$，而是两个不同的尺度 r_1 和 r_2，例如上节 $r_1=0.6$，$r_2=0.4$，而右边和左边质量(或概率)分别为 p_1 和 p_2，且 $p_1+p_2=1$. 从(7.8)式考虑，覆盖 2^k 个子间隔的配分函数为

$$Z_k=\sum_{i=1}^{2^k}\left(\frac{p_i{}^q}{r_i{}^\tau}\right), \qquad (7.20)$$

见图 7.3. 那么分成 2^{k+1} 个子间隔的配分函数就为

$$Z_{k+1}=Z_k\left(\frac{p_1^q}{r^\tau}+\frac{p_2^q}{r_2^\tau}\right). \qquad (7.21)$$

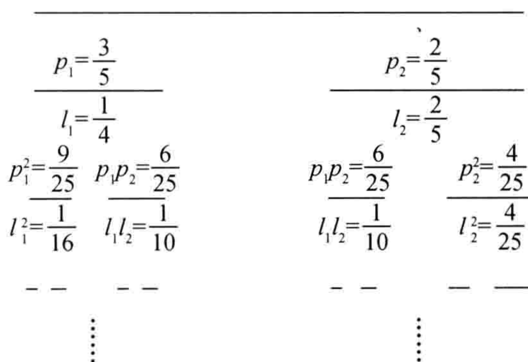


图 7.3 两尺度康托尔集

由(7.21)式，求出

$$Z_k=\frac{p_1^q}{r_1^\tau}+\frac{p_2^q}{r_2^\tau}. \qquad (7.22)$$

当然我们要求 $k\to\infty$ 时，Z_k 既不是零也不是无穷，那么必须有

$$\frac{p_1^q}{r_1^{\tau(q)}}+\frac{p_2^q}{r_2^{\tau(q)}}=1. \qquad (7.23)$$

(7.23)式是两尺度康托尔集合的配分函数. 当 $q=0$ 时，因为按(7.17)式 $\tau(0)=-D$，那么就有

$$r_1^D+r_2^D=1. \qquad (7.24)$$

(7.24)式就是第二章所用的(2.39)式. 对于 $q=1$，按上节结果，$q=1$ 时 $\tau=0$，所以(7.23)式变成 $p_1+p_2=1$. 当 $q\to+\infty$时，若 $p_1>p_2$，则 $p_1^q\gg p_2^q$，故有

$$\frac{p_1^q}{r_1{}^{\tau(q)}}=1, \qquad (7.25)$$

那么有

$$\tau(q)=\frac{\ln p_1}{\ln r_1}q=\alpha_{\min}q, \qquad (7.26)$$

其中 $\alpha_{\min}$ 代表点集最密集状态的标度指数. 同理，当 $q\to-\infty$时，

$$\tau(q)=\frac{\ln p_1}{\ln r_1}q=\alpha_{\max}q, \qquad (7.27)$$

其中 $\alpha_{\max}$ 代表最稀疏状态的标度指数.

§7.3 多重分形的物理意义

在统计物理中,配分函数为

$$Z=\sum_i e^{-\beta E_i}, \tag{7.28}$$

其中 $\beta=\frac{1}{kT}$. 利用配分函数可以计算各种热力学的量. 例如系统的内能 E 为

$$E(\beta)=-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{7.29}$$

而自由能 f 为

$$f(\beta)=-\frac{\ln Z}{\beta}, \tag{7.30}$$

无量纲熵 s 为

$$\begin{aligned} s(\beta)&=\beta^2\ \frac{\partial f}{\partial \beta}=\beta^2\left(\frac{\ln Z}{\beta^2}-\frac{1}{\beta}\frac{1}{Z}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right) \\ &=\ln Z-\beta\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} \\ &=-\beta f+\beta E \\ &=\beta(E-f). \end{aligned} \tag{7.31}$$

由(7.31)式,得

$$f=E-\frac{s}{\beta}. \tag{7.32}$$

将(7.32)式与多重分形的(7.13)式比较看出,自由能 f 相当于质量矩的标度指数 $\tau(q)$,内能 E 相当于每一小段质量的标度指数 α,熵相当于段数 N 的标度指数 $f(\alpha)$.

因为热力学中一阶相变相当于熵的不连续性,它一定会在 $f(\alpha)$ 图上有所反映.

§7.4 人口分布的多分维过程

我们仅讨论一维情况下的人口分布. 若单位长度间隔分成两个部分,且左边一半人口占的比例为 p,右边一半占人口比例为$(1-p)$,即相当于迭代函数为

$$\begin{aligned} &x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n=w_1(x_n), && p_1=p, \\ &x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}=w_2(x_n), && p_2=1-p, \\ &x_n\in[0,1], \end{aligned} \tag{7.33}$$

按照(7.8)式,有

$$\tau(q)=\frac{\ln\sum_i p_i^q}{\ln r}=\frac{\ln[p^q+(1-p)^q]}{\ln\frac{1}{2}}. \tag{7.34}$$

由(7.14)式,得

$$\alpha(q)=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}q}=\frac{p^q\ln p+(1-p)^q\ln(1-p)}{p^q+(1-p)^q}\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}. \tag{7.35}$$

由(7.13)式,得

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\alpha q-\tau(q)\\&=\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\left[q\frac{p^q\ln p+(1-p)^q\ln(1-p)}{p^q+(1-p)^q}-\ln(p^q+(1-p)^q)\right].\end{aligned} \tag{7.36}$$

由(7.17)式,得

$$D_q=\frac{\tau(q)}{q-1}=\begin{cases}\dfrac{\ln[p^q+(1-p)^q]}{(q-1)\ln\frac{1}{2}}, & q\neq1,\\[2ex] \dfrac{p\ln p+(1-p)\ln(1-p)}{\ln\frac{1}{2}}, & q=1,\end{cases} \tag{7.37}$$

其中取 $p=0.25$ 的图像,见图 7.4.

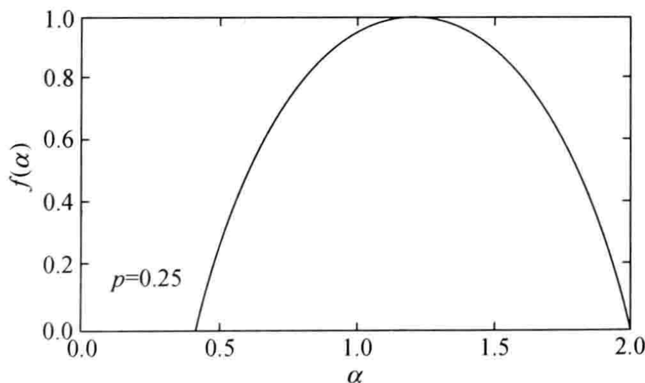


图 7.4 人口均匀分布的 $f(\alpha)$ 图像

我们现在关心的是 $\alpha_{\min}$ 和 $\alpha_{\max}$. 由于 $p=0.25$,所以在(7.35)式中,当 $q\to+\infty$时,p^q 比 $(1-p)^q$ 要更快地趋向于零,所以

$$\alpha(q)_{q\to+\infty}=\frac{\ln(1-p)}{\ln\frac{1}{2}}=\alpha_{\min}. \tag{7.38}$$

类似地,当 $q\to-\infty$ 时,

$$\alpha(q)_{q\to-\infty}=\frac{\ln p}{\ln\frac{1}{2}}=\alpha_{\max}. \tag{7.39}$$

用 $p=0.25$ 代入(7.38),(7.39)式,求得

$$\alpha_{\min}=0.45,\quad \alpha_{\max}=2. \tag{7.40}$$

这和图 7.4 中的 $\alpha_{\min}$,$\alpha_{\max}$一致.

这节的“物理量”是人口数量. $\alpha_{\min}$说明人口最密集的标度性质,$\alpha_{\max}$说明人口最稀疏的标度性质.

§7.5 均匀和不均匀的 $\tau(q)$

对于均匀的康托尔集合棒,按照(7.1)式,有 $r_1=r_2=\frac{1}{3}$,$p_1=p_2=\frac{1}{2}$,应用两尺度配分函数(7.23)式,得到

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\tau_q}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\tau_q}}=1, \tag{7.41}$$

即

$$2\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\tau_q}}=1.$$

由此得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\tau_q}\right]=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{D_q}\right]^{q-1}, \tag{7.42}$$

故得到

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{D_q},$$

因此

$$D_q=\frac{\ln 2}{\ln 3}=D. \tag{7.43}$$

(7.43)式说明,此时 D_q是普通的康托尔集合的维数. 由(7.14)式,得

$$\alpha(q)=\frac{d\tau}{dq}=\frac{d[D(q-1)]}{dq}=D. \tag{7.44}$$

(7.44)式说明,测度的标度指数 α 和分形的标度指数相同. 由(7.13)式,得

$$f(\alpha)=\alpha q-\tau=\alpha q-D(q-1)=Dq-Dq+D=D. \tag{7.45}$$

(7.45)式说明，每一个小段的标度指数和整个分形的标度指数 D 相同，因此

$$\tau=\alpha q-f(\alpha)=\alpha q-\alpha=Dq-D. \tag{7.46}$$

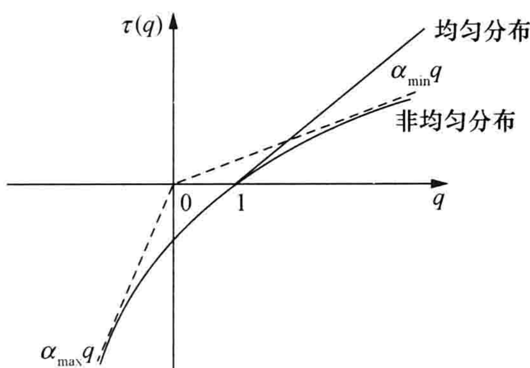


图 7.5　均匀分布和非均匀分布的 $\tau(q)$ 曲线

由(7.46)式看出，在 τ 对 q 的图上，τ 是一条直线，斜率是 α(或 D)，且 $q=1$ 时 $\tau=0$，它和图 7.2 一致，也就是说直线通过 $q=1$ 的点，见图 7.5. 而对于不均匀的康托尔集合，例如 $r_1=\frac{1}{4}$，$r_2=\frac{2}{5}$，$p_1=0.6$，$p_2=0.4$，用映射表示为

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=\frac{1}{4}x_n=w_1(x_n), && p_1=0.6, \\ x_{n+1}&=\frac{2}{5}x_n+\frac{3}{5}=w_2(x_n), && p_2=0.4. \end{aligned} \tag{7.47}$$

将其代入(7.23)式，得到

$$\frac{(0.6)^q}{(0.25)^\tau}+\frac{(0.4)^q}{(0.4)^\tau}=1. \tag{7.48}$$

(7.48)式是一个超越方程，$r_1\neq r_2$ 时要解出 τ 和 q 的显式表达式是相当困难的，但是某些特殊的情况还是可以求解的. 例如将(7.48)式修改为 $p_1=\frac{2}{3}$，$p_2=\frac{1}{3}$，$r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{1}{4}$，这里 $r_1=(r_2)^2$，此时方程(7.23)变成

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(q)}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\tau(q)}}=1 \tag{7.49}$$

或

$$\left(\frac{2}{3}\right)^q 2^{\tau(q)}+4^{\tau(q)}\left(\frac{1}{3}\right)^q-1=0. \tag{7.50}$$

若令

$$2^{\tau(q)}=\lambda, \tag{7.51}$$

则(7.50)式变成 λ 的二次方程

$$\left(\frac{1}{3}\right)^q\lambda^2+\left(\frac{2}{3}\right)^q\lambda-1=0 \tag{7.52}$$

或

$$\lambda^2+2^q\lambda-3^q=0. \tag{7.53}$$

这样,由(7.53)式,解得

$$\lambda=\frac{-2^q\pm\sqrt{2^{2q}+4\times3^q}}{2}. \tag{7.54}$$

由(7.51)式,求得

$$\tau(q)=\frac{\ln\lambda}{\ln2}=\frac{\ln\left(\sqrt{2^{2q}+4\times3^q}-2^q\right)-\ln2}{\ln2}. \tag{7.55}$$

由(7.17)式,求得

$$D_q=\frac{\tau(q)}{q-1}=\frac{\ln\left(\sqrt{2^{2q}+4\times3^q}-2^q\right)-\ln2}{(q-1)\ln2}. \tag{7.56}$$

由(7.56)式,求得 $q=0$,

$$D_0=\frac{\ln(\sqrt{5}-1)-\ln2}{-\ln2}=1-\frac{\ln(\sqrt{5}-1)}{\ln2}, \tag{7.57}$$

且由(7.17)式,得

$$\tau(1)=(1-1)D_1=0, \tag{7.58}$$

所以 $\tau(q)$ 曲线必定通过点($q=1,\tau(q)=0$). 而且,当 $q\to+\infty$ 时,$\left(\frac{2}{3}\right)^q\gg\left(\frac{1}{3}\right)^q$,则(7.49)式近似为

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(q)}}=1\quad(q\to+\infty). \tag{7.59}$$

这样,

$$\tau(q)\big|_{q\to+\infty}=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}q. \tag{7.60}$$

由图 7.4 看出,$q\to+\infty$ 时 $f(\alpha)=0$,故由(7.13)式,$q\to+\infty$,

$$\tau(q)\to\alpha_{\min}q, \tag{7.61}$$

所以在(7.59)式中,

$$\alpha_{\min}=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}. \tag{7.62}$$

同理,$q\to-\infty$时$\left(\frac{1}{3}\right)^q\gg\left(\frac{2}{3}\right)^q$,故近似有

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(q)}}=1, \tag{7.63}$$

$$\tau(q)\big|_{q\to-\infty}=\alpha_{\max}q,\quad \alpha_{\max}=\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}. \tag{7.64}$$

因此,对于非均匀的多重分形,由(7.55)式看出,$\tau(q)$是条曲线,且 $q\to+\infty$和 $q\to-\infty$的渐近线分别是 $\alpha_{\min}q$ 和 $\alpha_{\max}q$,见图 7.5 中的虚线.

图 7.5 表明,均匀分布和非均匀分布的多重分形的区别在于 q 阶矩的标度指数 $\tau(q)$,前者是直线,后者是曲线. 它是区分均匀和非均匀多重分形的重要特征.

§7.6 求 $\tau(q)$,$\alpha(q)$和 $f(\alpha)$的较好方法

由于用(7.23)式求出 $\tau(q)$和 q 的关系是困难的,我们考虑 $Z(q,\tau)$的 N 次方,

$$\begin{aligned} Z^N(q,\tau) &= \left(\frac{p_1^q}{r_1^{\tau(q)}}+\frac{p_2^q}{r_2^{\tau(q)}}\right)^N \\ &= \sum_{n=1}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{p_1^q}{r_1^{\tau(q)}}\right)^n\left(\frac{p_2^q}{r_2^{\tau(q)}}\right)^{N-n} = 1, \end{aligned} \tag{7.65}$$

其中$\binom{N}{n}$是二项式展开系数,

$$\binom{N}{n}=\frac{N!}{(N-n)!\ n!}. \tag{7.66}$$

当 $N\to\infty$时,(7.65)式求和号中的 N 项中只有最大项(当 $n=n_*$)占优,为此我们设法求出此项.

$$\begin{aligned} &\ln\binom{N}{n}\left(\frac{p_1^q}{r_1^{\tau(q)}}\right)^n\left(\frac{p_2^q}{r_2^{\tau(q)}}\right)^{N-n} \\ &=\ln N!\ -\ln(N-n)!\ -\ln n!\ +n\ln\left(\frac{p_1^q}{r_1^{\tau(q)}}\right)+(N-n)\ln\left(\frac{p_2^q}{r_2^{\tau(q)}}\right). \end{aligned} \tag{7.67}$$

将(7.67)式对 n 求导并令其为零,且用 n_* 代入,并使用斯特林(Stirling)近似

$$N!\ =n^n,\quad (N-n)!\ =(N-n)^{(N-n)},\quad n!\ =n^n, \tag{7.68}$$

得到

$$\ln(N-n_*)+1-\ln n_*-1+\ln\left(\frac{p_1^q}{r_1{}^{\tau(q)}}\right)-\ln\left(\frac{p_2^q}{r_2{}^{\tau(q)}}\right)=0,$$

即

$$\ln\left(\frac{N}{n_*}-1\right)=-q\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)+\tau(q)\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right). \tag{7.69}$$

由(7.69)式,得

$$\tau(q)=\frac{\ln\left(\frac{N}{n_*}-1\right)+q\ln\frac{p_1}{p_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}, \tag{7.70}$$

且(7.65)式中最大项 $n=n_*$ 为

$$\binom{N}{n_*}\left(\frac{p_1^q}{r_1^\tau}\right)^{n_*}\left(\frac{p_2^q}{r_2^\tau}\right)^{N-n_*}=1, \tag{7.71}$$

它的对数为

$$\left(\frac{N}{n_*}\right)\ln\left(\frac{N}{n_*}\right)-\left(\frac{N}{n_*}-1\right)\ln\left(\frac{N}{n_*}-1\right)+(q\ln p_1-\tau(q)\ln r_1)$$
$$+\left(\frac{N}{n_*}-1\right)(q\ln p_2-\tau(q)\ln r_2). \tag{7.72}$$

我们可以由(7.69)和(7.72)两个方程来决定 $\tau(q)$ 和 $\frac{N}{n_*}$ 两个量. 由于有了最大项,(7.71)式说明,只有段数为 $\binom{N}{n_*}$ 的一个康托尔集合了,它的测度是 $p_1^{n_*}p_2^{N-n_*}$,它的长度为 $r_1^{n_*}r_2^{N-n_*}$. 按照定义,测度的标度指数是 α,段数的标度指数是 $-f(\alpha)$,有

$$p_1^{n_*}p_2^{N-n_*}=(r_1^{n_*}r_2^{N-n_*})^{\alpha}, \tag{7.73}$$

$$\binom{N}{n_*}=(r_1^{n_*}r_2^{N-n_*})^{-f(\alpha)}. \tag{7.74}$$

由(7.73)式,求得

$$\alpha=\frac{\ln p_1+\left(\frac{N}{n_*}-1\right)\ln p_2}{\ln r_1+\left(\frac{N}{n_*}-1\right)\ln r_2}. \tag{7.75}$$

由(7.74)式并用斯特林近似(7.68)式,求得

$$f(\alpha)=\frac{N\ln N-(N-n_*)\ln(N-n_*)-n_*\ln n_*}{n_*\ln r_1+(N-n_*)\ln r_2}. \tag{7.76}$$

因此,对于给定的 q,利用(7.70),(7.75)和(7.76)式可分别求出 $\tau(q)$,$\alpha(q)$ 和

$f(\alpha)$. 那么

$$\tau(q)=\alpha q-f(\alpha)$$
$$=\frac{1}{n_*\ln r_1+(N-n_*)\ln r_2}[q(n_*\ln p_1+(N-n_*)\ln p_2)]$$
$$+(N\ln N-(N-n_*)\ln(N-n_*)-n_*\ln n_*).$$

用(7.71)对 n_* 的限制得到

$$\tau(q)=\frac{1}{n_*\ln r_1+(N-n_*)\ln r_2}[q(n_*\ln p_1+(N-n_*)\ln p_2)]$$
$$-q(n_*\ln p_1+(N-n_*)\ln p_2+\tau(n_*\ln r_1+(N-n_*)\ln r_2))$$
$$=\tau, \tag{7.77}$$

可知(7.75)式和(7.76)式是正确的. 尽管我们并未明显解出$\frac{N}{n_*}$,τ 和 q 的关系,但是由原始的(7.23)式,我们还是可以求出 $\alpha_{\max}$和 $\alpha_{\min}$. 例如(7.47)式中,$p_1=0.6$, $p_2=0.4$, $r_1=0.25$, $r_2=0.4$,当 $q\to+\infty$时,$(0.6)^q\gg(0.4)^q$,所以

$$\frac{(0.6)^q}{(0.25)^\tau}=1.$$

这样,按表 7.1,$q\to+\infty$时,

$$\tau(q)\big|_{q\to+\infty}=\frac{\ln(0.6)}{\ln(0.25)}q=\alpha_{\min}q,$$

所以

$$\alpha_{\min}=D_{+\infty}=\frac{\ln(0.6)}{\ln(0.25)}\approx 0.368.$$

同理,$q\to-\infty$时,

$$\tau(q)\big|_{q\to-\infty}=\frac{\ln(0.4)}{\ln(0.4)}q=\alpha_{\max}q,$$

$$\alpha_{\max}=D_{-\infty}=\frac{\ln(0.4)}{\ln(0.4)}=1.$$

图 7.6 是 $f(\alpha)$与 α 的关系.

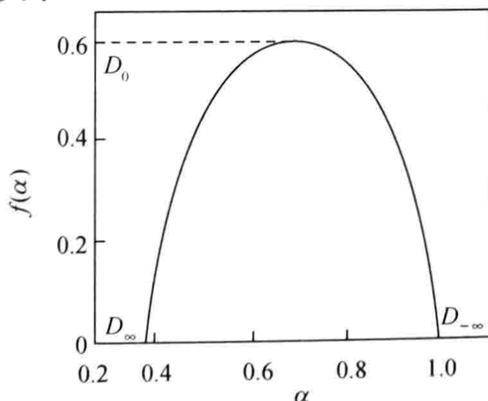


图 7.6 对(7.48)式用(7.76)式求得的 $f(\alpha)$

§7.7 二维面包师映射的多分维

我们考虑二维面包师映射

$$x_{n+1}=\begin{cases}r_1x_n, & \text{若 } y_n<p_1,\\ (1-r_2)+r_2x_n, & \text{若 } y_n>p_1,\end{cases}$$
$$y_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{y_n}{p_1}, & \text{若 } y_n<p_1,\\ \dfrac{(y_n-p_1)}{p_2}, & \text{若 } y_n>p_1.\end{cases} \tag{7.78}$$

这个映射首先将一个(x,y)平面上单位方块分成两个矩形,长度都是1,宽度一个是p_1,另一个是$p_2=1-p_1$,见图7.7(a). 然后,将两个矩形在x方向上分别通过因子r_1和r_2压缩,见图7.7(b). 下一步两个矩形又在y方向分别以因子$\dfrac{1}{p_1}$和因子$\dfrac{1}{1-p_1}$伸长变成两个竖状矩形,见图7.7(c). 最后将上面的竖状矩形仍然放在单位方块的右端,下面竖状矩形仍然放在单位方块的左端,见图7.7(d). 因此,映射(7.78)式就是将一个单位方块映射成长度都是1,宽度一个是$0\leqslant x\leqslant r_1$,另一个是$1-r_2\leqslant x\leqslant 1$的矩形块.

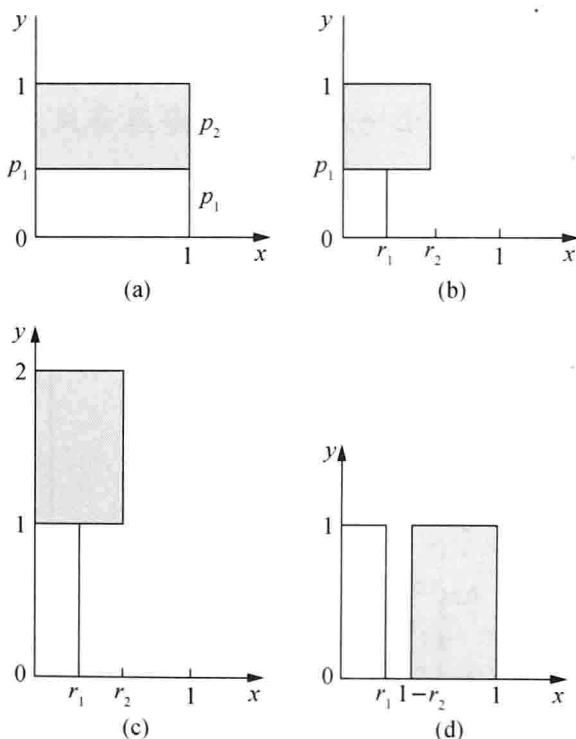


图7.7 单位方块上的面包师映射

若再将图 7.7(d)映射一次，就将单位正方形映射成四个矩形块，见图 7.8. 图中四个矩形长度都是 1，宽度分别是 $r_1^2, r_1r_2, r_1r_2, r_2^2$. 因此，从 x 方向看它就形成二标度的康托尔集合，见图 7.3. 从图 7.7(b)看出，在区间 $0\leqslant x\leqslant r_1$ 的概率测度为 p_1，在区间 $(1-r_2)\leqslant x\leqslant 1$ 的概率测度为 p_2，所以面包师映射的维数

$$d_q=1+D_q, \tag{7.79}$$

其中 D_q 满足(7.23)式. (7.79)式中的 D_q 我们已经讨论过，这里不再讨论了.

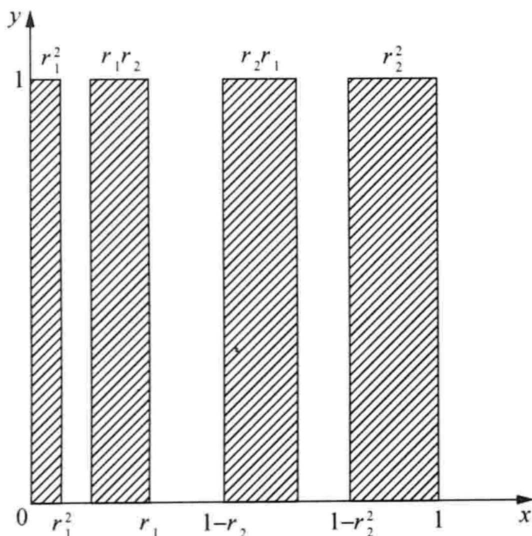


图 7.8　面包师映射两次后的状态

这节说明，二维映射可以用一维两标度康托尔集合棒来处理.

§7.8　三标度的多重分形

将一个单位间隔分成三等份，即形成下列带有测度的迭代函数系：

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n=w_1(x_n), &&p_1=\frac{1}{9},\\
&x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{3}=w_2(x_n), &&p_2=1-2p_1=\frac{7}{9},\\
&x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}=w_3(x_n), &&p_3=p_1=\frac{1}{9},\\
&x_n\in[0,1].
\end{aligned} \tag{7.80}$$

图 7.9 是迭代 4 次的结果. 从图 7.9 看出，由于 p_2 和 p_1 差别很大，所以迭代 4 次以后，质量极不均匀，那么由(7.16)式，

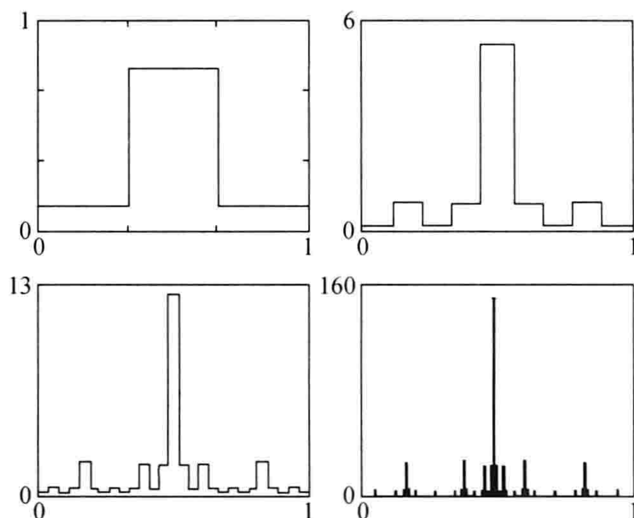


图 7.9 三标度的多重分形

$$D_q=\frac{1}{1-q}\frac{\ln(p_1^q+p_2^q+p_3{}^q)}{\ln 3}. \tag{7.81}$$

由(7.14)式,求得

$$\begin{aligned}\alpha(q)&=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}q}=\frac{\mathrm{d}[(q-1)D_q]}{\mathrm{d}q}\\&=-\frac{1}{\ln 3}\frac{p_1{}^q\ln p_1+p_2^q\ln p_2+p_3^q\ln p_3}{p_1^q+p_2^q+p_3^q}\\&=\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\frac{p_1^q\ln p_1+p_2^q\ln p_2+p_3^q\ln p_3}{p_1^q+p_2^q+p_3^q}.\end{aligned} \tag{7.82}$$

由(7.13)式,有

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\alpha q-\tau_q=\alpha q-(q-1)D_q\\&=\frac{1}{\ln\frac{1}{3}}\left[\frac{2p_1^q\ln p_1+p_2^q\ln p_2}{2p_1^q+p_2^q}q-\ln(2p_1^q+p_2^q)\right].\end{aligned} \tag{7.83}$$

按照表 7.1,当 $q\to+\infty$时,$\left(\frac{7}{9}\right)^q\gg 2\left(\frac{1}{9}\right)^q$,所以

$$\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^q}{\left(\frac{1}{3}\right)^\tau}=1,$$

即

$$\tau(q)\big|_{q\to\infty}=\frac{\ln\left(\frac{7}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}q\approx 0.2273q, \tag{7.84}$$

由此得

$$\alpha_{\min}=D_{+\infty}\approx 0.2273. \tag{7.85}$$

同理，$q\to-\infty$时，

$$\frac{2\left(\frac{1}{9}\right)^{q}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\tau}}=1,$$

即

$$\tau(q)\Big|_{q\to-\infty}=\frac{2\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}q\approx 3.99q, \tag{7.86}$$

由此得

$$\alpha_{\max}=D_{-\infty}\approx 3.99. \tag{7.87}$$

由于质量分布不均匀，使得 $\alpha_{\min}$ 和 $\alpha_{\max}$ 相差很大. 图 7.10 是 $f(\alpha)$ 和 $\alpha(q)$ 与 q 的关系. 从图 7.10 看出，$q\to+\infty$ 时，$\alpha_{\min}$ 使 $f(\alpha)=0$，但是 $q\to-\infty$ 时，$\alpha_{\max}$ 未能使 $f(\alpha)=0$. 图 7.11 是 $f(\alpha)$ 和 $\alpha(q)$ 的关系. 和图 7.10 类似，$q\to-\infty$ 时，$\alpha_{\max}$ 也未能使 $f(\alpha)=0$.

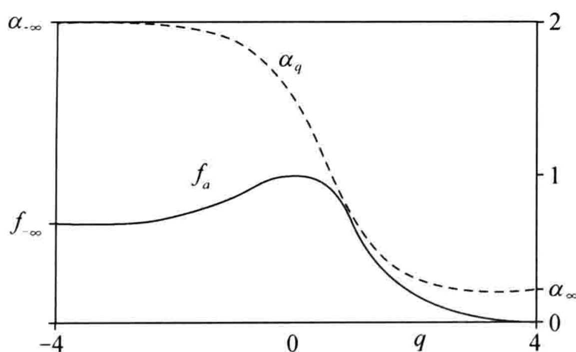


图 7.10　$f(\alpha)$ 和 $\alpha(q)$ 与 q 的关系

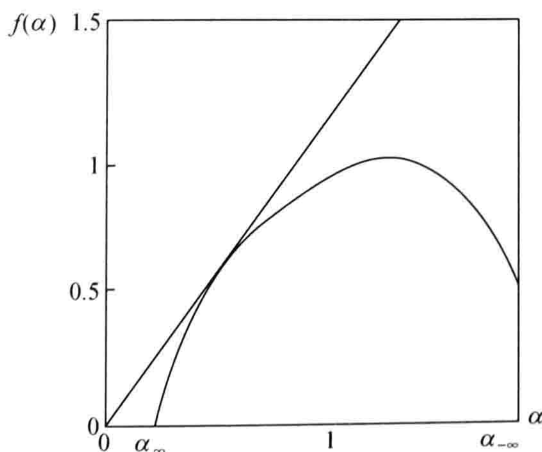


图 7.11　$f(\alpha)$ 和 $\alpha(q)$ 的关系

§7.9 分层电阻网络和增长模型的多重分形

这节首先讨论电阻及相应的电压. 若一个网络的两端电压降 $V_{AD}=1$,那么在网络电路上的电压降分别是 $V_{AB}=V_1$, $V_{BC}=V_2$,不断增加的电阻网络见图7.12. 从图7.12看出,这里网络的尺寸就是多重分形的过程,而电压 V_1, V_2 就是相当于测度. 我们设 $V_1=\frac{1}{3}$, $V_2=\frac{1}{6}$,由(7.16)式,得

$$D_q=\frac{1}{1-q}\frac{\ln\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^q+4\left(\frac{1}{6}\right)^q\right]}{\ln 3}. \tag{7.88}$$

由(7.14)式,得

$$\alpha_q=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}[(q-1)D_q]=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^q\ln\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)^q\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^q+2\left(\frac{1}{6}\right)^q\right]\ln\frac{1}{3}}$$

$$=\left(2+\frac{1}{1+2^{q-1}}\right)\frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{7.89}$$

由(7.13)式,得

$$f(\alpha)=\frac{(1+2^{q-1})(1+2^{1-q})\ln 2+\ln 2^q}{(1+2^{q-1})\ln 3}. \tag{7.90}$$

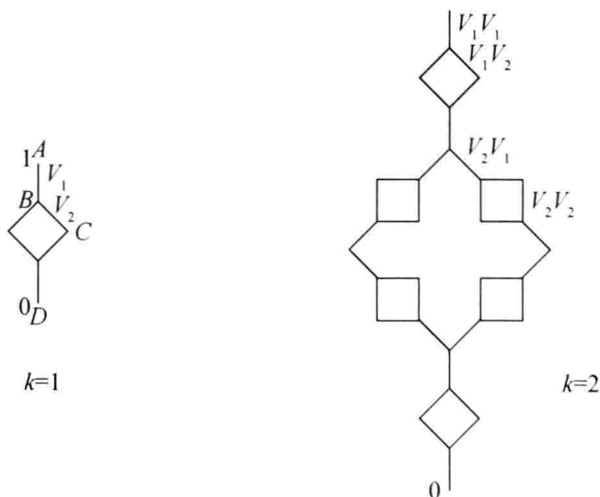


图 7.12 分层电阻网络的多重分形过程

这样导得

$$D_0=\frac{\ln 6}{\ln 3}\approx 1.6309, \tag{7.91}$$

以及

$$\alpha_{+\infty} = 2\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 1.2619,$$

$$\alpha_{-\infty} = 3\frac{\ln 2}{\ln a3} \approx 1.8927, \tag{7.92}$$

$$D_1 = \frac{5}{2}\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 1.5773.$$

从 $\alpha_{+\infty}$ 和 $\alpha_{-\infty}$ 的差别看，电阻网络的电压分布也是不均匀的.

下面谈一个增长模型. 图 7.13 是一维生长模型，它反映生长过程中的不均匀. 第一步将 3 个质点(取质点质量为 1)放在第 1,3,4 的位置上. 第二步，在第 9 到第 16 的位置上，将第一步的“种子”放大两倍. 这个过程一直重复下去，见图 7.13. 从图 7.13 看出，右边的质量密集程度明显高于左边.



图 7.13 一维生长模型的前几步

经过 k 步后，生长的尺度为 4^k，我们用 $r=2^k$ 作为盒子的尺寸去覆盖对象. 从图 7.13 看出，最后的盒子是最右边的，其质量是 2^k，而

$$\frac{\text{非空盒子质量}}{\text{总质量}} = \left(\frac{\text{盒子尺寸}}{\text{总尺寸}}\right)^{\alpha}, \tag{7.93}$$

那么对最右边的点集，按(7.93)式，有

$$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2^k}{4^k}\right)^{\alpha_{\min}},$$

其中总质量是 3^k，总长度是 4^k. 可以求得

$$\alpha_{\min} = D_{\infty} = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln\left(\frac{2}{4}\right)} \approx 0.585. \tag{7.94}$$

同理，最稀的盒子是最左边的点集. 按(7.93)式，

$$\frac{1^k}{3^k} = \left(\frac{1^k}{4^k}\right)^{\alpha_{\max}},$$

所以

$$\alpha_{\max} = D_{-\infty} = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \approx 0.792. \tag{7.95}$$

对于 $f(\alpha)$,我们可以从标度指数角度将 N 分成两段 N_1 和 N_2,其中 N_1 的尺度为$\frac{\alpha-\alpha_{\min}}{1-\alpha}$,标度指数为 $\alpha-\alpha_{\min}$,N_2 的尺度为$\frac{2(\alpha_{\max}-\alpha)}{1-\alpha}$,标度指数为 $2(\alpha_{\max}-\alpha)$,然后取平均,所以

$$N=r^{-f(\alpha)},$$

即

$$f(\alpha)=\frac{\ln N}{\ln\frac{1}{r}}, \tag{7.96}$$

那么

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=\frac{\frac{N_1+N_2}{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}}{2\ln\frac{1}{r}} \\ &=\frac{(\alpha-\alpha_{\min})\ln\frac{(\alpha-\alpha_{\min})}{(1-\alpha)}+2(\alpha_{\max}-\alpha)\ln\frac{2(\alpha_{\max}-\alpha)}{1-\alpha}}{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)(\alpha_{\max}-\alpha_{\min})}. \end{aligned} \tag{7.97}$$

求出的 $f(\alpha)$见图 7.14.

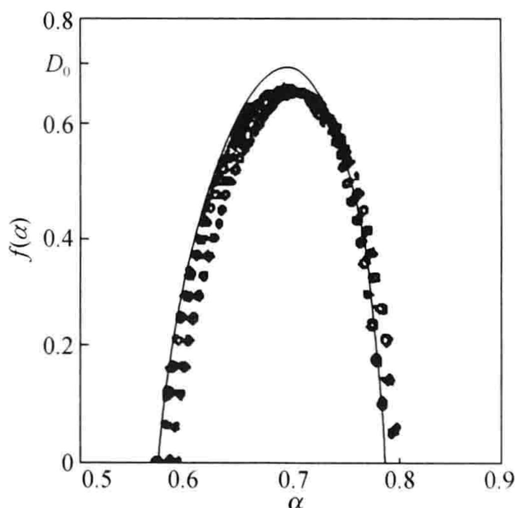


图 7.14 (7.97)式的 $f(\alpha)$图像

图 7.15 是二维生长模型. 第一步只有 1 个种子. 第二步是在第一步的 4 个角上加上原来两倍长度和宽度的样本,这样共 17 个种子. 图 7.15 中只有三步. 也就是说,第三步的中心部分只要缩小 5 倍即为第二步的中心部分,4 个角只要缩小$\frac{2}{5}$倍就是第二步的 4 个角. 这样,

$$r_1=\frac{1}{5},\quad r_2=r_3=r_4=r_5=\frac{2}{5}, \tag{7.98}$$

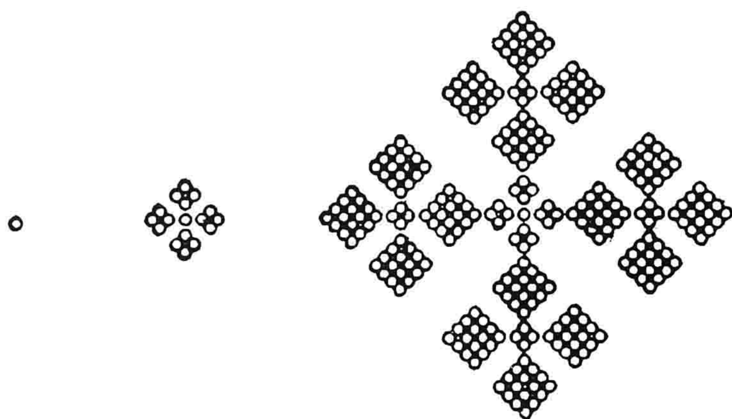


图 7.15 二维生长模型

相应的种子个数或测度则为

$$p_1=\frac{1}{17},\quad p_2=p_3=p_4=p_5=\frac{4}{17}. \tag{7.99}$$

按照(7.23)式，有

$$\frac{p_1^q}{r_1^\tau}+4\,\frac{p_2^q}{r_2^\tau}=1, \tag{7.100}$$

即

$$\frac{\left(\frac{1}{17}\right)^q}{\left(\frac{1}{5}\right)^{D_q(q-1)}}+4\,\frac{\left(\frac{4}{17}\right)^q}{\left(\frac{2}{5}\right)^{D_q(q-1)}}=1. \tag{7.101}$$

当 $q\to\pm\infty$ 时，求得

$$\begin{aligned} D_{+\infty}&=\alpha_{\min}=\frac{\ln\left(\frac{4}{17}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}\approx 1.579,\\ D_{-\infty}&=\alpha_{\max}=\frac{\ln\left(\frac{1}{17}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}\approx 1.760. \end{aligned} \tag{7.102}$$

§ 7.10 混沌动力系统的多重分形

混沌最典型的模型是逻辑斯蒂(logistic)映射：

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)=f(x_n). \tag{7.103}$$

混沌点集在空间是非常不均匀的，也要用多重分形来描述. μ 是控制参数. 第 n 次迭代收敛到普适标度函数(或称为费根鲍姆(Feigenbaum)函数方程)

$$g(x)=-\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right), \tag{7.104}$$

请参看下一章(8.13)式,其中 $g(x)$是 n 很大时的 $f^n(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}}=\alpha\approx 2.5, \tag{7.105}$$

其中 d_n 和 d_{n+1} 分别是周期 n 相邻两条周期线之间的距离和周期 $n+1$ 相邻两条周期线之间的距离.

由(7.104)式,若 $g(0)=1$,则倍周期分岔过程为

$$\begin{aligned} &g(g(0))=g(1)=-\frac{1}{\alpha}g(0)=-\frac{1}{\alpha}, \\ &g\left(g\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)=-\frac{1}{\alpha}g(1)=-\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{7.106}$$

(7.106)式表示尺度为 1 的尺度,经过倍周期分岔过程分岔出两段,尺度各为 $r_1=\frac{1}{\alpha}$和 $r_2=\frac{1}{\alpha^2}$,其测度 $p_1=p_2=\frac{1}{2}$,故按(7.23)式,得

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\tau}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^q}{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^\tau}=1, \tag{7.107}$$

其中 $\alpha\approx 2.5$. 因此,$q\to\pm\infty$时,

$$\begin{aligned} &D_{+\infty}=\alpha_{\min}=\frac{\ln p_2}{\ln r_2}=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{1}{\alpha^2}}\approx 0.3778, \\ &D_{-\infty}=\alpha_{\max}=\frac{\ln p_1}{\ln r_1}=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{1}{\alpha}}\approx 0.7555. \end{aligned} \tag{7.108}$$

$f(\alpha)$的图像见图 7.16.

混沌系统的多重分形反映点集合 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的不均匀分布.

对于圆映射系统,

$$\theta_{n+1}=f(\theta_n)=\theta_n+\Omega-\frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n), \tag{7.109}$$

其中 K 是控制参数. $K<1$ 时常出现旋转数

$$\omega=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n-\theta_0}{n} \tag{7.110}$$

被锁频在$\frac{p}{q}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$的有理数上的情况,其中 F_n,F_{n+1} 为相邻的两个斐波那契数,p,q 是整数. $K>1$ 时很容易由拟周期运动转变成混沌. 图 7.17 是 $K=1$ 时,旋

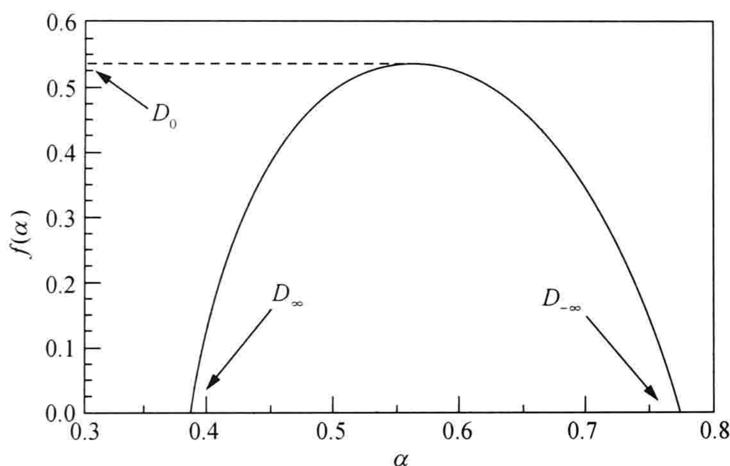


图 7.16　费根鲍姆吸引子 $f(\alpha)$ 曲线

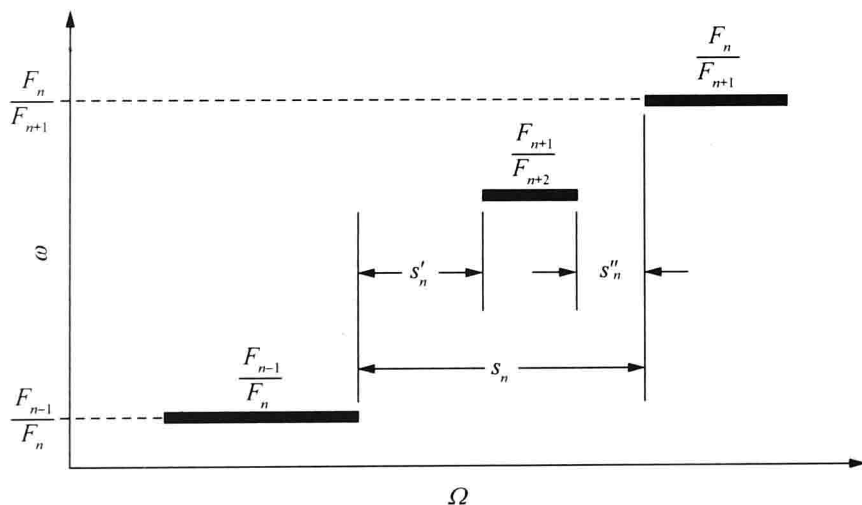


图 7.17　K=1 时的锁频区域

转数 ω 和参数 Ω 之间的关系. 图中粗黑线长度代表锁频区域的长度,例如图中 $\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{0}{1},\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{1}{1},\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}=\frac{1}{2}$. 图中 s'_n 和 s''_n 表示锁频区域的间隔长度,它相当于康托尔集合的两个区间. 随着 n 的加大,也会出现 4,8,16 等比康托尔集合更小的间隔. 从图 7.17 可看出,这也形成了两尺度的康托尔集,

$$r_1=\frac{s'_n}{s_n},\quad r_2=\frac{s''_n}{s_n}, \tag{7.111}$$

可以按照(7.24)式

$$r_1^D+r_2^D=1 \tag{7.112}$$

求出分数维 D.

若又考虑到不均匀性，则可以用多重分形来描述．例如，对于最稀区求得

$$\alpha_{\max}=D_{-\infty}\approx 1.8980, \tag{7.113}$$

对于最密区求得

$$\alpha_{\min}=D_{+\infty}\approx 0.6326, \tag{7.114}$$

经过计算，$f(\alpha)$的图像见图 7.18.

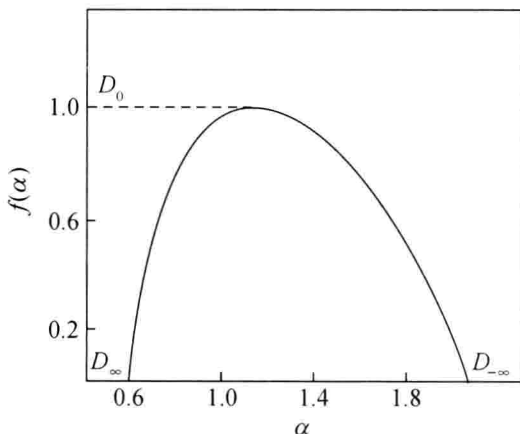


图 7.18　圆映射 $K=1$ 的 $f(\alpha)$图像

关于圆映射，我们还要在下一章讨论．

小　结

统计物理学中的配分函数反映了微观状态能量 E_i 的概率大小，用到分形客体上可以说明质量、分形段数，以及质量的 q 阶矩是如何随尺子变化而变化的．相变临界点上存在各种临界指数，而在分形客体上存在无数个标度指数 α、τ、f、$D(q)$等．从物理本质上讲，它说明多尺度现象的极其不均匀性．我们要特别关注 $\alpha_{\max}$和 $\alpha_{\min}$，它反映分形客体两个极端状态（最稀和最密）的标度状况，也要关注$\tau(q)$在均匀和非均匀时的差别．

第八章　混沌、湍流与分形

湍流是物理学中的老问题，也是物理学中最复杂的问题之一. 混沌是近 50 年新发展起来的学科，它说明一个确定的动力系统也可以有随机的结果. 混沌、湍流都是确定的随机现象，它们和分形的共同特征是多尺度现象.

本章将介绍混沌和湍流的各种模型以及它们和分数维的联系.

§8.1　费根鲍姆常数和两尺度康托尔集

考虑二次迭代映射

$$x_{n+1}=f(x_n)=\mu x_n(1-x_n),\tag{8.1}$$

其中参数 μ 是控制参数. 以初值 x_0 代入(8.1)式右端，左边就得到 x_1，再将 x_1 代入(8.1)式得右端，左边就得到 x_2，这样操作下去，就得到一系列数值

$$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots.\tag{8.2}$$

当参数满足

$$0\leqslant\mu\leqslant3\tag{8.3}$$

时就得到定常解，即迭代很多次以后(8.1)式左边和右边相等的解，即

$$x_*=\mu x_*(1-x_*).\tag{8.4}$$

由(8.4)式，求得

$$x_*=0\quad 或\quad x_*=1-\frac{1}{\mu}.\tag{8.5}$$

(8.5)式的两个解称为(8.1)式的定常解. 例如当 $0\leqslant\mu\leqslant1$ 时，迭代多次后得到一系列的数值如下：

$$0,0,0,0,\cdots.\tag{8.6}$$

(8.6)式就是定常解，是(8.5)式的 $x_*=0$ 的情况. 当 $1\leqslant\mu\leqslant3$ 时，迭代多次后成为

$$1-\frac{1}{\mu},1-\frac{1}{\mu},1-\frac{1}{\mu},1-\frac{1}{\mu},\cdots,1-\frac{1}{\mu},\tag{8.7}$$

见图 8.1(a). (8.7)式就是(8.5)中的 $x_*=1-\frac{1}{\mu}$ 的情况. 但是当参数满足 $3\leqslant\mu\leqslant3.449$ 时，迭代多次后得到如下一系列数值：

$$x_1,x_2,x_1,x_2,x_1,x_2,\cdots,x_1,x_2.\tag{8.8}$$

(8.8)式的数列每两个数重复一次，称为周期 2 解，见图 8.1(b). 当参数满足 $3.449<\mu\leqslant 3.545$ 时，就成为周期 4 解，即

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, \tag{8.9}$$

每 4 个数重复一次，见图 8.1(c). 当然还有 8 个数重复一次，16 个数重复一次等等的周期 8、周期 16 等周期 2^n 的解. 但是当 $\mu>3.57$ 以后，数列(8.2)式中的数就再也不重复，成为非周期解，这就是混沌解，见图 8.1(d). 总之，如此简单的迭代动力系统(8.1)式却包含有多种形态的解：定常态、周期 2^n 解态($n=1,2,3,\cdots$)，以及非周期混沌态.

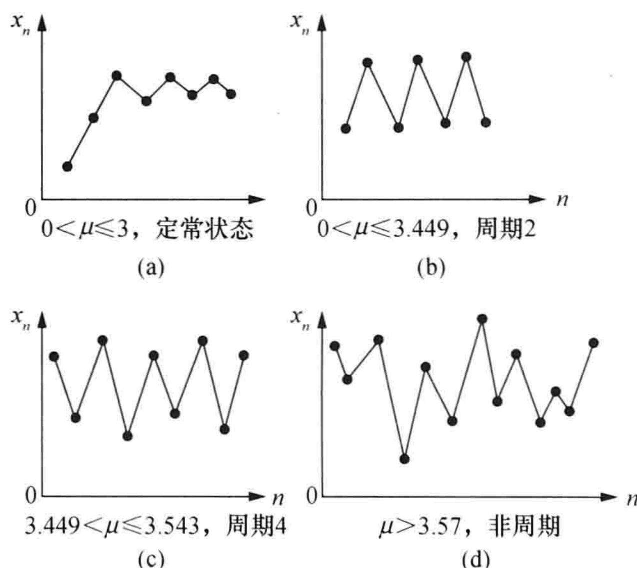


图 8.1 二次迭代映射(8.1)式的多种形态

我们也知道，当控制参数 μ 从 0 增加时，混沌态是通过倍周期分岔得到的，即当 μ 变化时，先是周期 1 态(即定常态)，然后分岔出周期 2 态，然后再分岔出周期 4 态等等，最后才到混沌态，图 8.2 绘出了(8.1)式的各种态随控制参数 μ 倍周期分岔的情况. 图 8.2 左边 x 区间[0,1]上的周期点上的值，从右图看出，它正类似于一分为二、二分为四等的康托尔集合. 问题是，这种一分为二的区间长度显然不是传统的康托尔集合，那么它们是什么呢?

(8.1)式中参数 $\mu=3.57$ 时出现了混沌，此时倍周期分岔所出现的各种周期均是不稳定的，但是它们在混沌轨道中还打上了各种周期轨道的烙印. 周期愈大，代表的尺度愈小，即它们将[0,1]区间分成的小段愈多，或者说，通过不断的伸长与折叠而形成了大大小小不同的尺度，因而混沌的轨道是多尺度现象的反映. $\mu<3.57$ 时不出现混沌，$\mu=3.57$ 时混沌就出现了，这使我们联想到物理学中的相变. 在临界点各种尺度的涨落都有，它们对温度的变化非常敏感，但是却

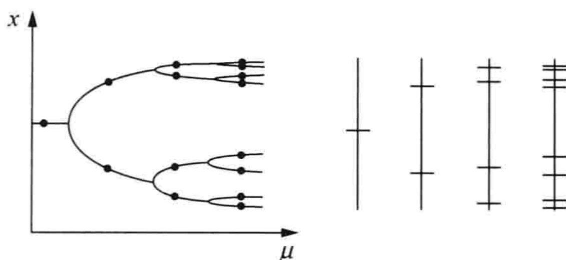


图 8.2 (8.1)式的倍周期分岔过程

存在和尺度无关的不变常数，如临界指数.

对于图 8.2，若考察相邻两个分岔点之间的参数距离 $\mu_{n+1}-\mu_n$，费根鲍姆发现，当 n 很大时，前面两个分岔点参数之间的距离是后面两个分岔点参数之间距离的 4.669 倍，这个常数 δ 称为费根鲍姆常数，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta\approx 4.669. \tag{8.10}$$

(8.10)式说明，分岔点间的距离越来越小，参看图 8.4. 而且，还可以看出，周期 2 状态两个“儿子”之间的距离约是“孙子”之间距离的 2.5 倍，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}}=\alpha\approx 2.5. \tag{8.11}$$

(8.10)和(8.11)式说明，系统(8.1)的参数 μ 每次以 $\frac{1}{\delta}$ 减小，周期点间的尺度以 $\frac{1}{\alpha}$ 减小. 迭代 n 次以后，尺度分别为 $\frac{1}{\delta^n}$ 和 $\frac{1}{\alpha^n}$. 从 $n=1$ 开始到 n 很大后，尺度 $\frac{1}{\delta^n}$ 相差好多个量级，尺度 $\frac{1}{\alpha^n}$ 也差好多个量级，所以混沌是一个无特征尺度的分形现象.

现在我们寻找迭代映射中的量和尺度之间的关系. 首先尺度由 $(\mu_n-\mu_{n-1})$ 减小至 $\frac{1}{\delta}$ 后，周期的个数 N 则是加倍，即

$$N(\mu_n-\mu_{n-1})=2N\left[\frac{1}{\delta}(\mu_n-\mu_{n-1})\right], \tag{8.12}$$

迭代函数 $f(x)$ 则变成了 $f(f(x))$，见图 8.3. 我们用 n 很大时的函数 $g(x)$ 和 $g(g(x))$ 来代替 $f(x)$ 和 $f(f(x))$，即

$$g(x)=-\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right). \tag{8.13}$$

按(7.105)式，从图 8.3 看出，若尺度缩小为 $\frac{1}{\alpha}$ 且反号，那么 $f(f(x))$ 的图像再放大 α 倍，且图像倒过来，就是 $f(x)$.

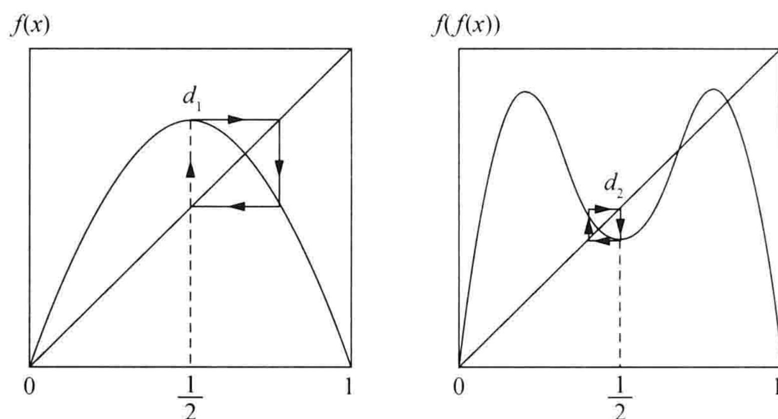


图 8.3 $f(x)$和 $f(f(x))$的图像

关系式(8.12)和(8.13)是重正化群关系. (8.13)式就是上一章的(7.104)式.

我们在参数 μ 轴上绘出 $\mu_{n-1},\mu_n,\mu_{n+1},\cdots,\mu_\infty$ 的位置,见图 8.4,其中 μ_∞ 是倍周期分岔进入混沌的临界点. 从图 8.4 看出,下列两个级数

$$\begin{aligned}&(\mu_n-\mu_{n-1})+(\mu_{n+1}-\mu_n)+(\mu_{n+2}-\mu_{n+1})+\cdots,\\&(\mu_{n+1}-\mu_n)+(\mu_{n+2}-\mu_{n+1})+(\mu_{n+3}-\mu_{n+2})+\cdots\end{aligned}\tag{8.14}$$

是一个等比级数,它们的和为

$$\mu_\infty-\mu_{n-1}=\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{1-\dfrac{1}{\delta}},\tag{8.15}$$

$$\mu_\infty-\mu_n=\frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{1-\dfrac{1}{\delta}}.\tag{8.16}$$

这样(8.12)式可以改写成

$$N[\delta(\mu_\infty-\mu_n)]=\frac{1}{2}N(\mu_\infty-\mu_n).\tag{8.17}$$

方程(8.17)式的解为

$$N(\mu_\infty-\mu_n)=(\mu_\infty-\mu_n)^{-\tau},\tag{8.18}$$

其中

$$\delta^{-\tau}=\frac{1}{2},\quad \tau=\frac{\ln 2}{\ln\delta}\approx 0.45.\tag{8.19}$$

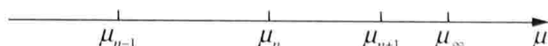


图 8.4 参数轴上分岔点 $\mu_{n-1},\mu_n,\mu_{n+1},\cdots,\mu_\infty$ 的位置分布

将(8.18)式与临界现象中的(1.4)式比较看出，当 $\mu_n\to\mu_\infty$ 时，周期数目 $N\to\infty$，正如相变中 $T\to T_c$ 时相关长度 ξ 变成无穷大一样.

有了关系式(8.13)，我们就可以回答费根鲍姆二次迭代映射(8.1)是如何一分为二的了. 为了清楚起见，将(8.13)式中的 x 改为 $x\alpha$，那么(8.13)式变成

$$g(g(x))=-\frac{1}{\alpha}g(\alpha x). \tag{8.20}$$

方程(8.20)式具有标度不变性，若 $g(x)$ 是(8.20)式的解，那么 $cg\left(\frac{x}{c}\right)$($c$ 是常数)也是(8.20)的解. 事实上，将 $cg\left(\frac{x}{c}\right)$ 代入方程(8.20)的左边和右边，得到

$$\text{左边}=cg\left(cg\left(\frac{x}{c}\right)\right),\quad \text{右边}=-\frac{1}{\alpha}cg\left(\alpha\frac{x}{c}\right),$$

只要令 $x=cx'$，$cg=g'$，立刻就使左边＝右边. 为此我们取

$$g(0)=1, \tag{8.21}$$

即 $x_0=0$，$x_1=1$，则由(8.20)式，得到

$$\begin{aligned}x_2&=g(x_1)=g(1)=g(g(0))\\&=-\frac{1}{\alpha}g(x_0)=-\frac{1}{\alpha}g(0)=-\frac{1}{\alpha},\end{aligned} \tag{8.22}$$

$$x_3=g(x_2)=g\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=g\left(\frac{1}{\alpha}\right), \tag{8.23}$$

注意 g 是偶函数，而

$$\begin{aligned}x_4&=g(x_3)=g\left(g\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)=-\frac{1}{\alpha}g(1)\\&=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^2}.\end{aligned} \tag{8.24}$$

这四个点的位置见图 8.5. 因此从 $x_0=0$ 出发，经过迭代以后变成康托尔集合. 有一半数列在$[x_2,x_4]$内，另一半数列在$[x_3,x_1]$ 内. $[x_2,x_4]$的长度为

$$r_1=\frac{1}{\alpha}\approx 0.4, \tag{8.25}$$

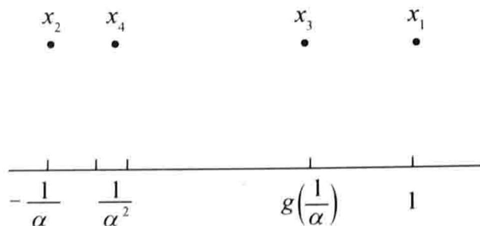


图 8.5 四次迭代后的位置

$[x_3, x_1]$的长度为

$$r_2=\frac{1-g\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{1+\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{\alpha^2}\approx 0.17. \tag{8.26}$$

若认为这是非均匀的康托尔集合,则由(7.23),得

$$\frac{p_1^q}{r_1^{\tau(q)}}+\frac{p_2^q}{r_2^{\tau(q)}}=1, \tag{8.27}$$

可以求得多分维,见(7.107)式.

(8.11)式的含义是尺子每迭代一次减小为$\frac{1}{\alpha}$,所以(8.25),(8.26)式也意味着取

$$r_1=\frac{1}{\alpha}, \quad r_2=\frac{1}{\alpha^2}. \tag{8.28}$$

总之,费根鲍姆常数α表征了二次迭代映射动力系统(8.1)式所建立的两种尺度的康托尔集合.

§8.2 圆映射和标度律

§8.1讨论了二次迭代映射随着参数值μ变化,形成倍周期分岔通向非周期混沌的道路. 现在,我们要研究从拟周期运动导致混沌的道路.

我们来看一个频率为Ω的周期性输入$A\cos\Omega t$加于一个线性系统会有什么结果. 例如,周期驱动的阻尼振荡线性系统

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0 x=A\cos\omega_1 t \tag{8.29}$$

当振幅A固定时,在强迫振荡频率$\omega_1=\sqrt{\omega_0{}^2-\alpha^2}$处,若$\alpha$很小,$\omega_1$接近于系统的固有频率$\omega_0$,则$x$达到最大,力学上称为共振. 因此,周期输入也是周期输出.

非线性系统却不一样. 由于系统内部的各种尺度(频率)的相互作用,输入若是一个频率ω,那么输出既可以有频率为ω的振荡,也可以有频率为$\frac{\omega}{n}$(n为正数)的次谐波,也可以有混沌,见图8.6. 例如,考虑强迫非线性振荡达芬(Duffing)方程

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}-x+x^3=A\cos\omega_1 t. \tag{8.30}$$

若产生的输出频率ω_2和输入频率ω_1之比可以写成

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{p}{q}, \tag{8.31}$$

其中p和q是两个整数,且p,q无任何公共因子,此时就说系统的状态是周期

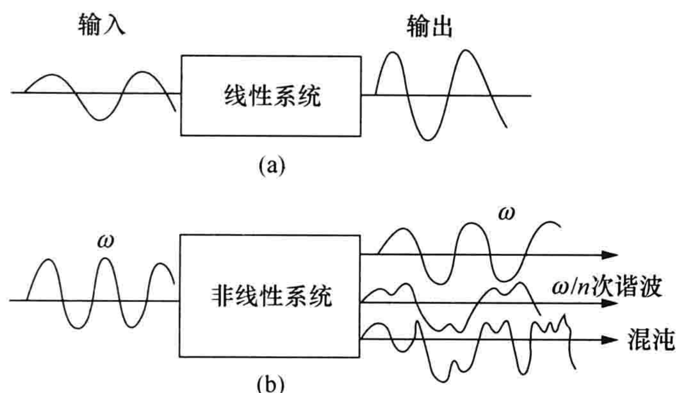


图 8.6 线性系统和非线性系统的输入和输出

的. 若$\frac{\omega_2}{\omega_1}$是无理数,那么称系统的状态是拟周期的.

当强迫项和阻尼项都是零时,方程(8.30)变成

$$\ddot{x}-x+x^3=0. \tag{8.32}$$

(8.32)式可化成方程组形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=x-x^3.\end{aligned} \tag{8.33}$$

(8.33)式有三个定常状态:(0,0),(1,0),(−1,0). 很容易说明,定常状态(0,0)是鞍点,定常状态(1,0)和(−1,0)是中心点,围绕中心点的运动是周期运动,而且振幅加大时,周期也变长,所以内部产生的周期和外部强迫的周期之间可以有各种各样的比值,包括谐波在内. 若加上阻尼力,那么定常状态(1,0)和(−1,0)就好比位势的两个槽,而定常状态(0,0)就好比位势的一个脊,见图 8.7. 若一个小球在左槽内振动,时间很长以后它就被吸引到左槽底部,若小球在右槽内振动,时间很长以后它就被吸引到右槽底部,此时系统中仅有耗散力,因而运动是简单的,阻尼耗散能量使得运动衰减下来. 但是若加上强迫项后,它成为系统的驱动力,不断变化强迫项的振幅 A,相当于图 8.7 位势下面的一块板来回扰动. 到一定程度时,左槽中的小球在左槽中来回振荡几次后就被甩到右槽中,在右槽中又来回振荡几次后被甩到左槽中. 且左右槽来回振荡次数不定,这就形成了非周期的混沌. 所以,对非线性系统,输入是周期的,但输出可能是拟周期的,甚至于是非周期的. 拟周期运动是混沌的前兆.

在三维相空间中,拟周期运动最好用环面来说明,它相当于一个自行车的内胎表面. 它有两种频率的运动:一方面,运动要围绕内胎表面绕大圈转,这相当于地球绕太阳的公转,有一个频率 ω_1(周期为 T_1);另一方面,运动要绕内胎自转,这相当于地球的自转,有一个频率 ω_2(周期为 T_2). 这两个频率之比

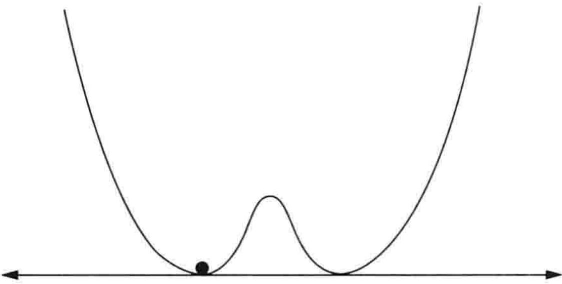


图 8.7　强迫振荡的混沌模型

$$\Omega=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{T_1}{T_2} \tag{8.34}$$

称为旋转数.

若运动轨道头尾相接,则运动是周期的. 若运动轨道头尾不相接,布满了整个环面,则运动是拟周期的. 见图 8.8(a),(b). 为了描述拟周期运动,我们垂直于大圈作一平面切割环面(此平面称为庞加莱(Poincaré)截面,见图 8.8(c)),那么在环面上的运动就会在庞加莱截面上打上许多点. 例如 $\Omega=\frac{3}{2}$表示绕小圈转的时间是绕大圈的时间的$\frac{3}{2}$倍,见图 8.9(a). 同样,$\Omega=\frac{5}{3}$就表示绕小圈转的时间是绕大圈的时间的$\frac{5}{3}$倍,见图 8.9(b). 图 8.9 中运动是沿顺时针旋转,其轨道

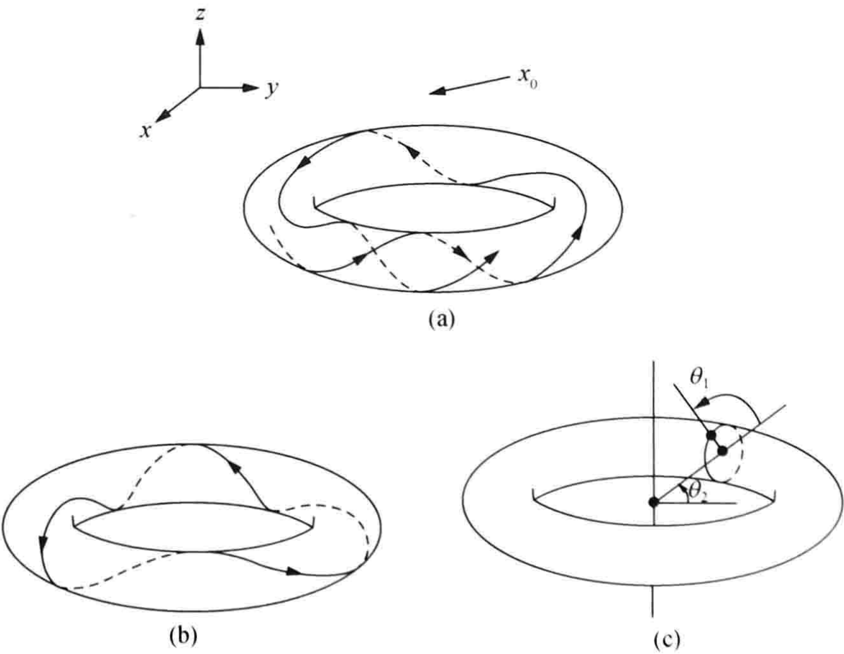


图 8.8　环面上的轨道

(a) 拟周期运动;(b) 旋转数 $\Omega=3$ 的周期运动;(c) 庞加莱截面

从 0 开始，轨道绕大圈一次，又回到庞加莱截面上，即又在庞加莱截面上打一个点．图 8.9(a)说明大圈旋转了 3 周，小圈只转了 2 周，而图 8.9(b)说明大圈旋转了 5 周，小圈只转了 3 周．

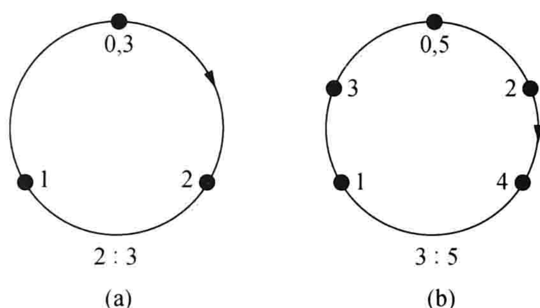


图 8.9 环面运动的庞加莱截面

(a) $\Omega=\frac{3}{2}$；(b) $\Omega=\frac{5}{3}$

如果 Ω 是无理数，那么庞加莱截面上的点就绝对不会重复，因而就会布满图 8.9 的小圈，这就是拟周期运动．

像(8.30)式所示的周期驱动系统那样，参数 A 很小(驱动力很小)时，系统处在定常状态．参数 A 稍大一点(驱动力稍大一点)时，定常状态就分岔成周期状态，如轨道在两个槽间的周期振动，这时就出现了一个频率，当驱动力再增加，就可能出现第二个频率，此时两个频率构成的轨道很可能就是在二维环面上．当两个频率之比是无理数时，这就是拟周期运动．当驱动力再增加，这种拟周期运动就变成了混沌．

在一个系统中，当两个或者多个振荡的频率发生非线性相互作用时，很容易产生锁频现象．前面我们已经看到，当控制参数在某个范围内，两个频率之比 $\Omega=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{p}{q}$($p,q$ 为整数)时，我们就称这两个振荡是锁频(frequency-locked)的．$\Omega=\frac{p}{q}=1$ 则称为同步(synchronization)．惠更斯发现，两只挂钟背靠背地挂在同一木墙时，这两只钟会走到严格的同步，而月球绕地球公转(频率设为 ω_1)和自转(频率设为 ω_2)满足$\frac{\omega_1}{\omega_2}=1$，所以我们在地球上仅仅只能看见月球的正面，这都是同步锁频现象．

从物理上讲，锁频的物理意义就是在非线性系统中，当参数值(如强迫振荡的振幅 A)变化到一定范围内，必然引起非线性振荡的振幅变化．前面我们已经知道，由于振荡的周期(频率)和振幅有关，所以必然引起频率的变化．若两个频率之比适合关系式(8.34)时，说明两种频率的非线性相互作用引起 ω_2 的 p 次谐波，并和 ω_1 的 q 次谐波发生共振．这就是说，锁频发生是因为频率共振的相互

作用战胜了频率本身的变化. 若 ω_1 是强迫振荡的频率,由于 ω_1 的低次谐波的振幅大于高次谐波的振幅,所以锁频通常发生在 p 和 q 比较小,例如 $\frac{p}{q}=\frac{1}{2},\frac{2}{3}$ 时,而不是 p 和 q 比较大,例如 $\frac{p}{q}=\frac{17}{19}$ 时,因为 p 和 q 比较小时会发生较强的相互作用.

如果我们仅仅考虑横截环面的庞加莱截面,那么旋转数差一个整数值的庞加莱截面是相同的. 例如旋转数 $\Omega=1\frac{2}{3}$ 和 $\Omega=\frac{2}{3}$,前者表示的小圈转一圈加 $\frac{2}{3}$,大圈才转一圈的过程,和后者表示的小圈只转 $\frac{2}{3}$,大圈转一圈的过程,打出点 1(见图 8.9(a))的效果是相同的. 因此我们今后只考虑旋转数的分数部分,如 2.3 的分数部分是 0.3,16.77 的分数部分是 0.77.

拟周期运动最简单的模式就是圆映射,我们用它来研究锁频. 由于在庞加莱截面上是一个圆上角度 θ 的变化,所以角度之间的映射写成

$$\theta_{n+1}=f(\theta_n) \quad (\text{mod } 1). \tag{8.35}$$

其中"mod"表示模数. 这个映射定义角度在圆上旋转一周是 1,因而 $\theta=0.7$ 和 $\theta=1.7$ 代表圆上同样的点,函数 $f(\theta)$ 是周期函数,

$$\theta_{n+1}=f(\theta_n)=\theta_n+\Omega-\frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n) \quad (\text{mod } 1, K>0) \tag{8.36}$$

就称为圆映射. 映射(8.36)式有两个控制参数,一个是频率比参数 Ω,另一个是非线性强度参数 K.

我们定义旋转数

$$\omega=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(\theta_0)-\theta_0}{n}. \tag{8.37}$$

由于(8.36)式中模数为 1,因此 $f(\theta)$ 当 θ_{n+1} 超过 1 时,要将它的数值减去 1. 图 8.10(a),(b)分别是 $K=0.5,\Omega=0.04$ 和 $K=0.5,\Omega=0.95$ 时的 $\theta_{n+1}=f(\theta)$ 图及直线 $\theta_{n+1}=\theta_n$ 的图像.

图 8.10(a)上有一个稳定的不动点(大约在 $\theta=0.1$ 处)和一个不稳定的不动点 $\theta=0.4$. 由于只有一个稳定的不动点,因此从初值 $\theta_0=0.55$ 出发,轨道最后将趋向于稳定的不动点 $\theta=0.1$. 图 8.10(b)上也有一个稳定的不动点 $\theta=0.9$ 和一个不稳定的不动点 $\theta=0.6$. 这两个图上的不动点都是迭代一次($q=1$)的结果,即

$$\theta_{n+1}=f^q(\theta_n), \quad q=1, \tag{8.38}$$

那么它们的锁频是 $\frac{0}{1}$ 还是 $\frac{1}{1}$(即同步),即 $p=0$ 还是 1 呢?

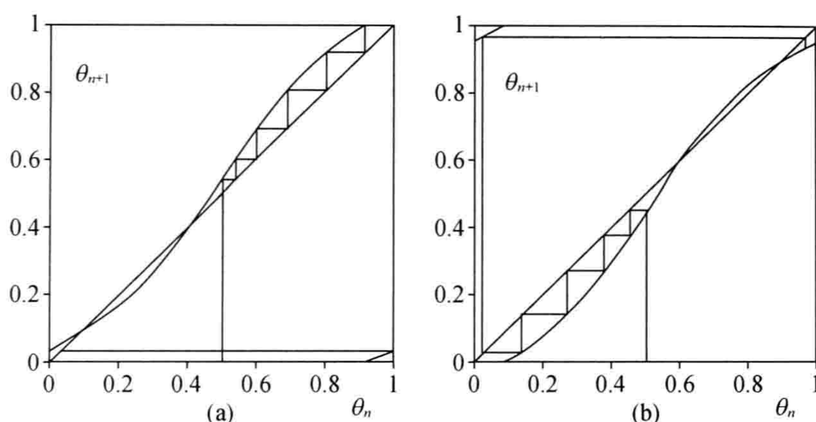


图 8.10 圆映射

(a) $K=0.5, \Omega=0.04$; (b) $K=0.5, \Omega=0.95$

对圆映射(8.36)式,求不动点的方法是使其左右两边相等,即

$$\theta = f(\theta) = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta) \quad (K>0, \bmod 1). \tag{8.39}$$

由(8.39),求得

$$\frac{2\pi\Omega}{K} = \sin(2\pi\theta). \tag{8.40}$$

由于$|\sin(2\pi\theta)| \leqslant 1$,所以要求

$$\Omega \leqslant \frac{K}{2\pi}. \tag{8.41}$$

(8.41)式说明,Ω 较小时圆映射迭代收敛到稳定的不动点 $\theta=0.1$,例如图 8.10(a),即迭代后的角距离是零,锁相频率比值为$\frac{0}{1}$,锁定在与 $\Omega=0.04$ 相近的 $p=0$ 上.

当 Ω 较大(例如图 8.10(b)中 $\Omega=0.95$)时出现稳定不动点的要求(8.41)式就不满足. 由于(8.40)的条件是 mod 1,也就是角度 θ 再转一圈仍是同一个不动点,所以(8.39)式改成

$$\theta + 1 = \theta + \Omega - \frac{K}{\pi}\sin(2\pi\theta), \tag{8.42}$$

即

$$\Omega \geqslant 1 - \frac{K}{2\pi}. \tag{8.43}$$

图 8.10(b)中的 $\Omega=0.95, K=0.5$ 正好满足这个条件. (8.43)式说明 Ω 比较大时,圆映射迭代收敛到稳定的不动点 $\theta=0.9$,但迭代后的角距离是 1,即锁相频率比值为$\frac{1}{1}$,因而锁定在与 $\Omega=0.95$ 相近的 $p=1$ 上. 因此非线性映射(8.36)式

在 $K>0$ 时，ω 可以锁定在与 Ω 相近的有理数 $\frac{p}{q}$ 上. 类似地，对于锁频 $\frac{1}{2}$（$p=1$，$q=2$）和锁频 $\frac{2}{3}$（$p=2$，$q=3$），若 q 次迭代和 p 次公转以后达到同一个不动点，那么不动点应该满足

$$\theta+p=f^q(\theta), \tag{8.44}$$

其中 $f^q(\theta)$ 表示迭代 q 次.

对于固定的 $K=0.9$，图 8.11 分别是 1 次（$q=1$），2 次（$q=2$）和 3 次（$q=3$）迭代的不动点和它们在圆上的表示. 图中 q 周期（$\theta_{s1},\theta_{s2},\cdots,\theta_{sq}$）在圆周上分别有 $1,2,\cdots,q$ 个稳定的不动点，它们对应的函数为 $f^q_{\Omega_i}$ 或 $f^{F_i}_{\Omega_i}$，其中 F_i 是斐波那契数，且按(8.44)式，

$$f^{F_{i+1}}_{\Omega_i}(0)=p=F_i. \tag{8.45}$$

(8.45)式说明，系统常在两个相邻的斐波那契数 $\frac{F_i}{F_{i+1}}$ 之比上锁频.

总之，对 $0<K<1$ 时，运动经常是锁频到一个有理数，当频率之比为无理数时，描述一种拟周期运动，但不会出现混沌.

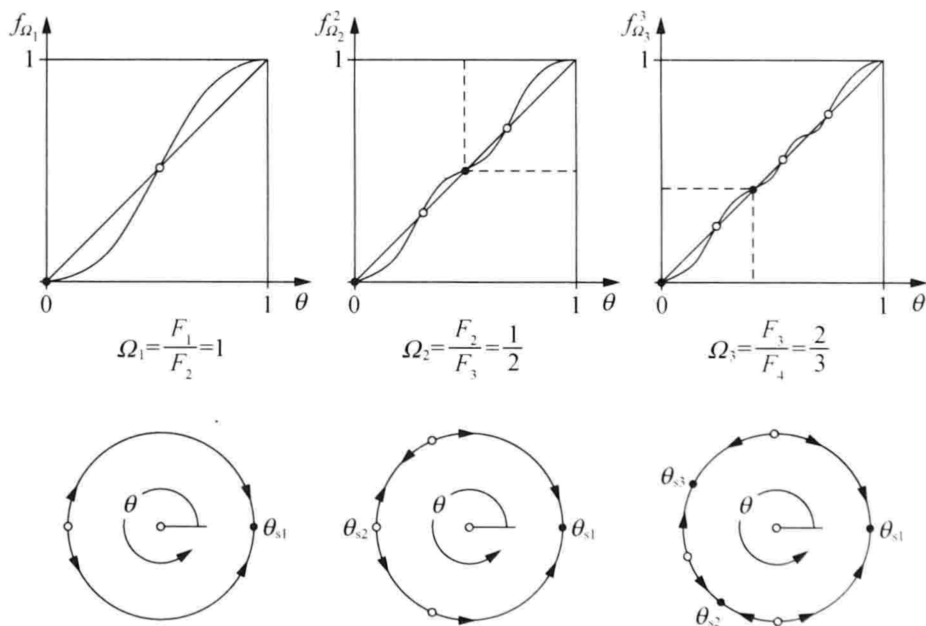


图 8.11 圆映射的 q 周期

在圆映射中，当 K 值固定并接近于 1 时，非线性耦合增强，整个频率锁相的区域增大，拟周期运动很易变成混沌.

和 § 8.1 中的二次映射类似，相邻两个螺旋数 Ω_i 差值之比

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega_n-\Omega_{n-1}}{\Omega_{n+1}-\Omega_n}, \tag{8.46}$$

同时锁频为$\frac{1}{2}$的“儿子”离 $\theta=0$ 的距离 d_1 和锁频为$\frac{2}{3}$的“孙子”离 $\theta=0$ 的距离 d_2 之比满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}}=\alpha=\frac{1}{G}, \tag{8.47}$$

其中

$$G=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618 \tag{8.48}$$

为黄金分割数. 另外,有和二维映射类似的关系

$$g(x)=\alpha g\left(\alpha g\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)\right). \tag{8.49}$$

(8.49)式就是类似于(8.20)式的圆映射的重正化群关系,这里不做详细论证.

§8.3 湍流及其统计描述

1893 年雷诺发现,当雷诺数

$$Re=\frac{UL}{\nu}=\frac{\text{惯性力}}{\text{黏性力}} \tag{8.50}$$

超过临界值后,就会出现杂乱无章的湍流. (8.50)式中 U,L 分别是速度和圆管直径,ν 是分子动力学黏性系数.

图 8.12 是 40 次实验在同样条件下所测得的湍流速度,可以看出湍流速度是随机的. 既然湍流能够用确定的纳维-斯托克斯方程来描述,为什么它的解却是随机的呢?

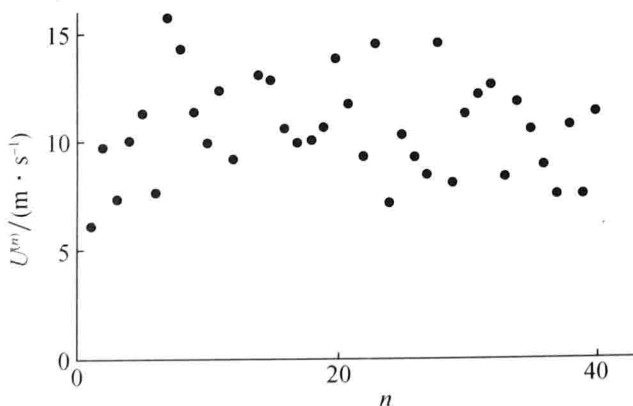


图 8.12 湍流速度场

横坐标 n 表示测量次数

混沌的发现人洛伦茨(Lorenz)发现三维动力系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-Prx+Pry,\\ \dot{y}&=Rax-y-xy,\\ \dot{z}&=xy-bz\end{aligned}\tag{8.51}$$

当普朗特数 $Pr=10$, $b=\dfrac{8}{3}$，莱雷数 $Ra=-PrRe^2Ri\approx 24.74$ 时就会出现混沌，其中 Ri 称为里查孙数. 图 8.13 是由洛伦茨方程(8.51)根据稍稍有所不同的初条件计算出的结果，图 8.13(c)是图 8.13(a)、(b)的差. 从图 8.13 看出，洛伦茨方程是确定性的方程却得到随机的结果，这说明纳维-斯托克斯方程也一样可以描述随机的湍流.

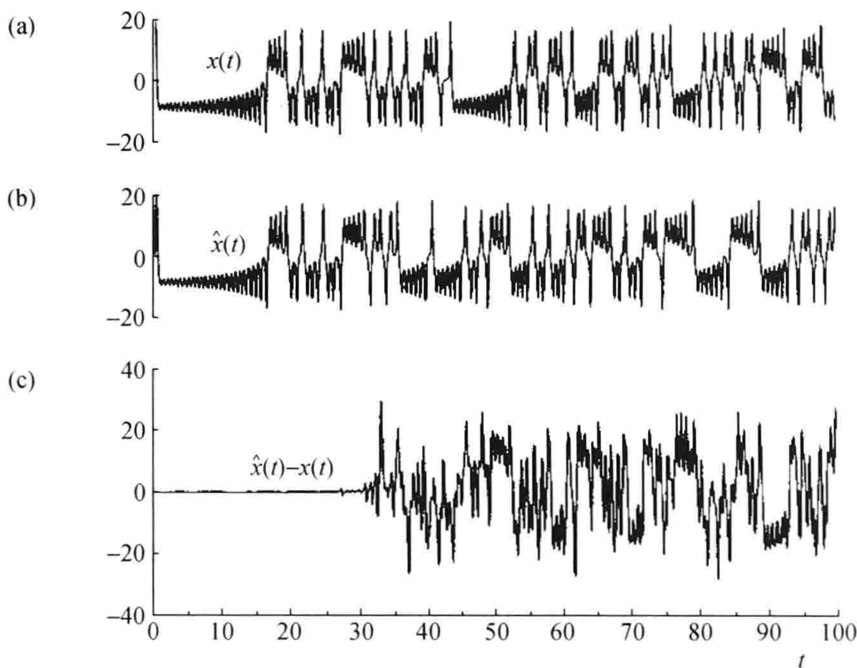


图 8.13

(a) 初条件(0.1,0.1,0.1)；(b) 初条件(0.100001,0.1,0.1)；(c) (a)结果和(b)结果的差

因为湍流速度场 u 是随机的，所以速度值在区间 Δu 上出现的概率(频率)不同. 我们把单位速度差出现的频率称为概率密度函数 $f(u)$，那么速度处在区间($u_a \leqslant u \leqslant u_b$)出现的概率为

$$P=\int_{u_a}^{u_b} f(u)\mathrm{d}u. \tag{8.52}$$

速度从 $-\infty$ 到 u 这个区间，累计的概率为

$$F(u)=\int_{-\infty}^{u} f(u)\mathrm{d}u. \tag{8.53}$$

F 称为累计概率密度分布函数. 由(8.53)式得出,概率密度 $f(u)$ 和累计概率密度分布函数 $F(u)$ 之间关系为

$$f(u)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}. \tag{8.54}$$

对湍流来讲,过去最常用的概率密度 $f(u)$ 为正态分布,也称为高斯分布:

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}. \tag{8.55}$$

图 8.14 是正态分布概率密度,其中,$\sigma=\langle u^2\rangle^{\frac{1}{2}}$ 称为方差. 这里 $\langle u^2\rangle$ 为 u 的二阶矩,u 的 m 阶矩定义为

$$\langle u^m\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}u^m f(u)\mathrm{d}u. \tag{8.56}$$

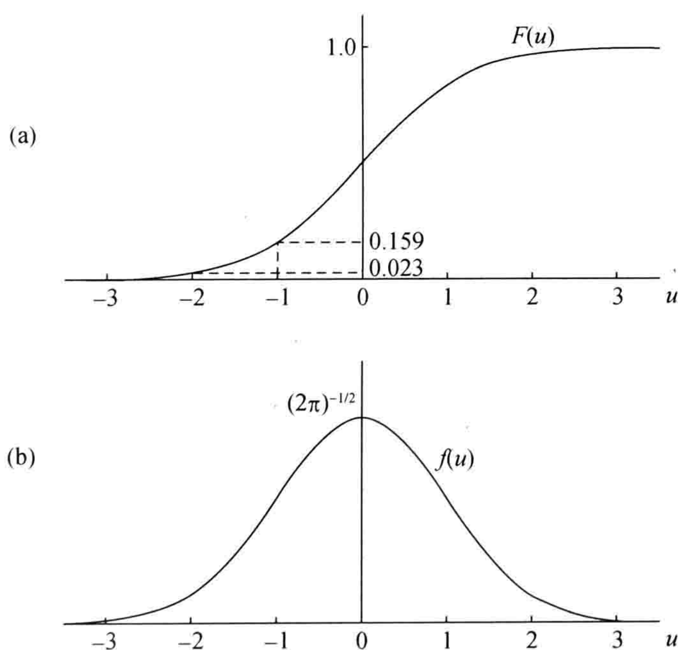


图 8.14　正态分布

(a) 累计概率分布;(b) 概率密度函数

将(8.55)式代入上式,得到高斯分布的 m 阶矩

$$\langle u^m\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^m}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u.$$

令 $x=\frac{u}{\sqrt{2\pi}}$,有

$$\langle u^m\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2^{\frac{m}{2}}\sigma^m}{\sqrt{\pi}}x^m\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x. \tag{8.57}$$

若 m 为奇数,上式积分结果为 0. 若 m 为偶数,$m=2n$,则(8.57)式为

$$\begin{aligned}\langle u^m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}} x^{2n} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} 2x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $t=x^2$,有

$$\begin{aligned}\langle u^m \rangle &= \frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\left(n+\frac{1}{2}\right)-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}} \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} = \frac{\sigma^m m!}{2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{m}{2}\right)!} \\ &= (m-1)\times(m-3)\times\cdots\times 3\times 1\times\sigma^m,\end{aligned} \tag{8.58}$$

其中 $\Gamma(x)$为伽马函数. 特别当 $m=2,4,6$ 时,有如下结果:

$$\langle u^2\rangle=\sigma^2,\quad \langle u^4\rangle=3\sigma^4,\quad \langle u^6\rangle=15\sigma^6. \tag{8.59}$$

大量的观测事实表明,实际湍流速度概率分布是非高斯型的,这是湍流间歇性的反映. 为了定量描述一个随机过程 $u(t)$与高斯分布的偏离程度,常引入偏斜度(skewness)S 和陡峭度(flatness 或 kurtosis)F,它们的定义分别为

$$S=\frac{\langle u^3\rangle}{\langle u^2\rangle^{3/2}}=\frac{\langle u^3\rangle}{\sigma^3}, \tag{8.60}$$

$$F=\frac{\langle u^4\rangle}{\langle u^2\rangle^2}=\frac{\langle u^4\rangle}{\sigma^4}. \tag{8.61}$$

由(8.59)式知,对正态分布 $S=0$,$F=3$. (8.60),(8.61)式中 σ 是方差,它表示 $f(u)$围绕着 $u=0$ 铺开的程度. 偏斜度 S 是 $f(u)$倾斜程度和非对称性的量度,图 8.15 表示实际的湍流资料 $u(t)$及其算出的相应的概率密度函数. $S>0$ 表示正偏差的三次方和超过负偏差的三次方和的绝对值,见图 8.15(a). 若 $f(u)$围绕着 $u=0$ 是对称的,则 $S=0$. 陡峭度 F 表征概率分布偏离 $u=0$ 的程度. 若陡峭度 $F>3$,则表示 $f(u)$尾部的值相对大,或称为大陡峭度,见图 8.15(b). $f(u)$尾部的值也可以相对小,即小陡峭度,见图 7.15(c). 偏斜度和陡峭度可以判别实际的湍流分布偏离正态分布的程度.

概率论上的大数定律和中心极限定理对判别混沌和湍流的各态历经也很有意义.

湍流的各态历经假设认为,时间平均可以代替总体平均,这可以看成是大数定律的推广. 大数定律告诉我们,N 个相互独立的随机变量,当 N 很大时,有一个稳定的平均值. 混沌的基本性质是对初条件敏感,或者说长期预报是不可预测的,那么气候是否可以预测? 图 8.16 中圆圈点表示某种初条件,经过很长时

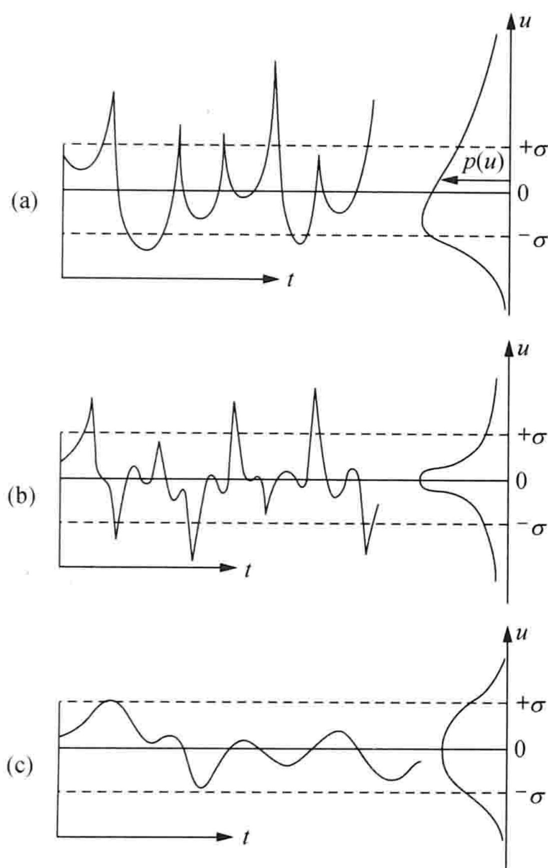


图 8.15 湍流速度场 $u(t)$ 和它的概率密度

(a) 正偏斜度;(b) 大陡峭度 $F>3$;(c) 小陡峭度 $F<3$

间后的 X_1 状态敏感于初条件. 再经过很长时间的状态 X_2 也敏感于初条件. 类似,又各自再经过很长时间的状态 $X_3, X_4, \cdots, X_n$ 都各自敏感于初条件,因此 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 形成相互独立的随机变量,但可以有一个稳定的平均值,见图 8.16. 由此可知,短期气候还是可能进行预测的.

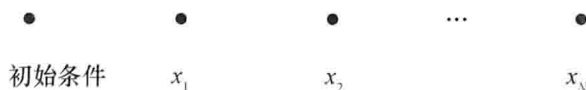


图 8.16 敏感初条件

概率论的中心极限定理表述如下:设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是独立的随机变量,它们具有相同的概率分布函数,求和的随机变量为

$$Y = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{8.62}$$

那么在一定条件下,当 $n \to \infty$ 时,Y 的概率密度 $f(Y)$ 服从正态分布(8.55)式.

中心极限定理告诉我们,若用一段时间 T 内的时间序列 $u(t)$ 的平均值代替

总体平均,平均值的涨落大约是 $O(\sqrt{T})$,T 足够大时,用时间平均代替总体平均还是相当合理的.

正因为湍流的随机性,里查孙建议用处处不可微的魏尔斯特拉斯函数来描述湍流速度场.

§8.4 对数正态分布和列维分布

现在描述湍流已不再用正态分布,而常用对数正态分布和列维分布,这是因为大小涡旋是不能隔开的. 若正态分布变量 u,它的平均值是 $\langle u\rangle$,方差是 σ^2,那么正态分布概率密度为

$$f(u)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-\langle u\rangle)^2}{2\sigma^2}}. \tag{8.63}$$

令新的变量 v 为

$$v=e^u, \tag{8.64}$$

则变量 v 服从的概率密度 $f(v)$ 称为对数正态分布. 由于

$$F_v(v)=p(e^u<v)=p(u<\ln v)=F(\ln v), \tag{8.65}$$

所以对数正态分布的概率密度为

$$\begin{aligned}f(v)&=\frac{dF_v(v)}{dv}=\frac{dF}{du}\frac{du}{dv}=\frac{1}{v}\frac{dF(u=\ln v)}{du}\\&=\frac{1}{v}f(\ln v)=\frac{1}{v\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln v-\langle\ln v\rangle)^2/\sigma^2}.\end{aligned} \tag{8.66}$$

图 8.17 是 $\langle v\rangle=1,\sigma^2=\frac{1}{20},\frac{1}{2}$ 和 5 的对数正态分布的累计概率密度和概率密度分布函数. 第三章我们已经说明,从图 8.17(b)看出,只要 σ_v 和 v 足够大,对数正态分布将趋于幂律分布,其尾巴比较长.

列维分布已经在第五章有所论述. 这种分布的数学表达式不易写出,但它的傅里叶变换可以方便地写出.

概率密度 $f(u)$ 的傅里叶变换

$$\varphi(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{iku}du \tag{8.67}$$

称为特征函数(characteristic function). 按(8.56)式,它也可以称为 e^{iku} 的平均值 $\langle e^{iku}\rangle$. 概率密度 $f(u)$ 也即是特征函数 $\varphi(k)$ 的逆变换:

$$f(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(k)e^{-iku}dk. \tag{8.68}$$

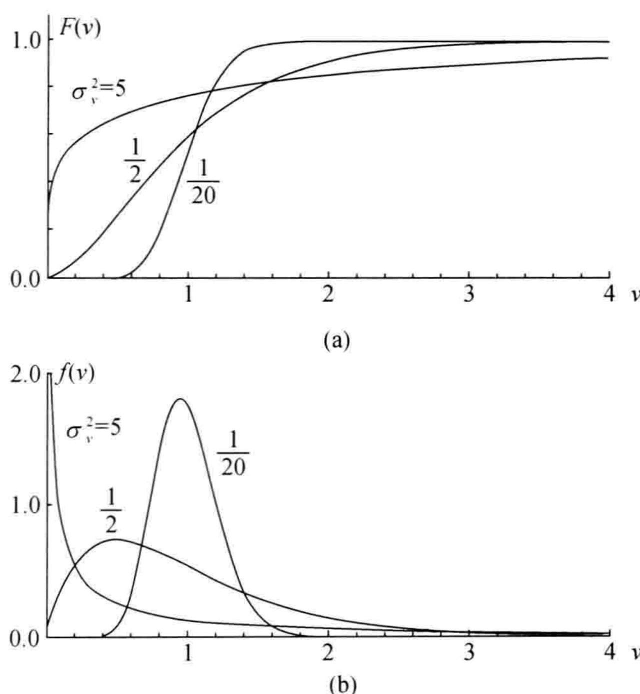


图 8.17 对数正态分布

(a)累计概率密度；(b)概率密度分布函数

例如，对正态分布(8.55)式，它的特征函数为

$$\varphi(k)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}. \tag{8.69}$$

由概率密度 $f(u)$ 按照(8.56)式去求矩是相当麻烦的，但若有特征函数 $\varphi(k)$ 就方便多了. 例如按(8.67)式，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}k}\right|_{k=0}=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)\mathrm{d}u=\mathrm{i}\langle u\rangle,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k=0}=(\mathrm{i})^2\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\mathrm{d}u=(\mathrm{i})^2\langle u^2\rangle.$$

一般情况有，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^m\varphi}{\mathrm{d}k^m}\right|_{k=0}=(\mathrm{i})^m\int_{-\infty}^{+\infty} u^m f(u)\mathrm{d}u=(\mathrm{i})^m\langle u^m\rangle,$$

所以 m 阶矩为

$$\langle u^m\rangle=\frac{1}{(\mathrm{i})^m}\left.\frac{\mathrm{d}^m\varphi}{\mathrm{d}k^m}\right|_{k=0}. \tag{8.70}$$

(8.70)式说明，u 的 m 阶矩 $\langle u^m\rangle$ 可以用特征函数 $\varphi(k)$ 的 m 阶微商在 $k=0$ 处的值求得，这比用(8.56)式的积分方法方便得多. 这样，由正态分布特征函数(8.69)式容易求得它的各阶矩：

$$\langle u\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}k}\bigg|_{k=0}=-\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2k^2})(-k\sigma^2)\big|_{k=0}=0,$$

$$\langle u^2\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}k^2}\bigg|_{k=0}=-\left[-\sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2k^2}+(-k\sigma^2)(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2k^2})(-k\sigma^2)\right]\big|_{k=0}=\sigma^2.$$

所得结果与(8.59)式相同.

研究湍流时常遇到 α 稳定分布. 无偏斜度(即对称)的 α 稳定分布的特征函数为

$$\varphi(k)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\right)^{\alpha}|k|^{\alpha}}, \tag{8.71}$$

$\alpha=2$ 时即正态分布，$\alpha=1$ 时为柯西分布. 柯西分布的概率密度为

$$f(u)=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\pi(u^2+2\sigma^2)}. \tag{8.72}$$

α 稳定分布有一个重要特点，若 $\alpha\in[0,2)$，则

$$\langle u^m\rangle\to\infty,\quad m\in[0,2). \tag{8.73}$$

对柯西分布(8.72)，显然有

$$\langle u\rangle=0,\quad \langle u^2\rangle\to\infty. \tag{8.74}$$

由于湍流有大小不同尺度，如大气中涡旋的水平尺度，大至数千千米，小至几毫米，求得的平均值(1 阶矩)甚至方差(2 阶矩)出现(8.73)式发散的结果就不足为奇了.

尽管 α 稳定分布有特征函数表达式(8.71)，但是它们的傅里叶变换(即概率密度函数)一般很难给出解析表达式，不过当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，对应的概率密度有如下表达式：

$$\begin{cases} f(u)=\left(\dfrac{\sigma}{2\sqrt{2}\pi}\right)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}u}}, & u\in(0,+\infty), \\ f(u)=0, & u\in(-\infty,0). \end{cases} \tag{8.75}$$

(8.75)式称为列维分布. 有时也将(8.75)式的幂函数形式

$$f(u)\propto u^{-\alpha-1}=u^{-(\alpha+1)} \tag{8.76}$$

称为列维分布.

将(8.55)式和(8.76)式比较看出，正态分布是指数函数，而列维分布是幂函数，这两种分布有如下差别：前者描述了有特征尺度的现象，后者描述无特征尺度(多尺度)现象；前者是中心极限定理的结果，后者是许多小因子归纳的结果；前者是对称的，后者通常有较长的尾巴，甚至有无限大的方差. 图 8.18 是正态分布和列维分布的概率密度函数的比较. 图 8.19 是正态分布对应的布朗运动和列维分布对应的列维运动的区别. 从图 8.18 看出，列维分布有较长的尾巴，即大

涨落事件仍有一定的概率. 从图 8.19 看出,布朗运动每一步游动的距离差别不大,而列维运动有时一步可以游动很长的距离,这就是§1.8的异常扩散的原因.

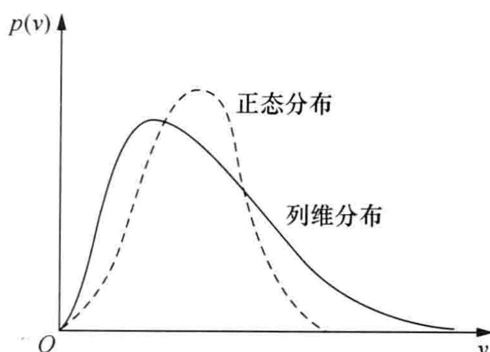


图 8.18 速度的正态分布和列维分布

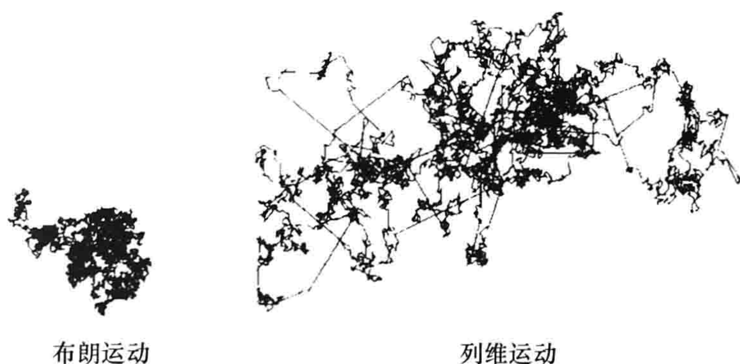


图 8.19 布朗运动和列维运动轨迹的区别

§8.5 均匀各向同性湍流的科尔莫戈罗夫模型

科尔莫戈罗夫早已认识到湍流的无特征尺度性,认为在雷诺数 Re 很大时,湍流可以由相差很大、不同尺度的涡旋组成. 最大的涡旋直接由平均流场(或平均温度场)的不稳定性及边界条件产生. 大涡旋通过惯性将能量输送到或破裂成较小的涡旋,较小的涡旋又破裂成更小的涡旋,这样就形成一连串无穷多级的大大小小的涡旋,就是所谓的级联过程. 大涡旋从外界获取能量,逐级传递给次级涡旋,最后在最小的涡旋尺度上被黏性所消耗. 由于雷诺数比较大,级联较多,在级联过程中,小尺度(大波数)的湍流最终必定达到某种统计平衡状态,并且不再依赖于产生湍流的外部条件(它们是非各向同性的),而形成所谓“局地均匀各向同性湍流”. 也就是说,虽然大尺度湍流是非均匀非各向同性的,但小尺度湍流仍可以看成是均匀各向同性的,湍流具有普遍的统计规律.

为了确定这些规律,科尔莫戈罗夫在 1941 年提出两条假设(简称 K41 模型).

假设一:在雷诺数足够大时,存在一个高波数区,其中湍流处于统计平衡状态,小尺度的湍流统计特征由尺度 r 或波长 k、湍流能量耗散率 ε 和分子运动学黏性系数 ν 决定,其中

$$r \ll L, \tag{8.77}$$

其中 $L=\frac{v^3}{\varepsilon}$称为最大湍流尺度或积分尺度. 由 ε 和 ν 还决定了湍流的最小尺度 $\eta=\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$. 这个区域称为平衡区,见图 8.20,它包括了图中以惯性输送起主导作用的惯性区和耗散区. 图中波数 k 较小(尺度大)的区域从外界获取能量,称为含能涡区;波数 k 很大时,尺度小到分子的区域耗散能量,称为耗散区. 因为 ε 的单位是 $\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}$,$\nu$ 的单位为 $\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$,$k$ 的单位为 m^{-1},能谱 $S(k)$的单位 $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-2}$,则可建立起湍流能谱的关系

$$S(k)=f(k,\varepsilon,\nu). \tag{8.78}$$

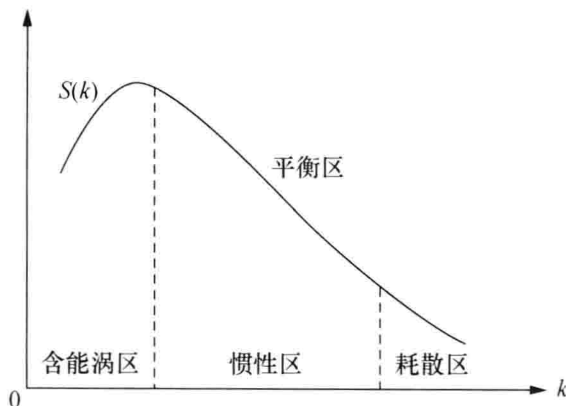


图 8.20 湍流高频能谱区的划分

这里有四个相关物理量,具有 2 个独立的量纲[L]和[T],由 Π 定理,可形成两个无量纲量

$$\Pi_1=\frac{S(k)}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}}, \quad \Pi_2=k\eta, \tag{8.79}$$

因而得到湍流区的能谱为

$$S(k)=\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}F(k\eta), \tag{8.80}$$

其中 $F(k\eta)$是 $k\eta$ 的待定函数.

假设二:当雷诺数 Re 足够大时,在上述局地均匀各向同性的平衡区中,又有一个仅由参数 ε 确定的子区域,称为惯性子区,见图 8.20,其尺度满足

$$\eta \ll r \ll L. \tag{8.81}$$

在这个区域，湍流的统计特征仅决定于 ε 和 r，而与 ν(或 η)无关.

对于速度差的 2 阶结构函数 $S_2(r)=\langle[u(x+r)-u(x)]^2\rangle$，设它是 ε 和尺度 r 的函数，那么从量纲上立即得到

$$S_2(r)\propto\varepsilon^{\frac{2}{3}}r^{\frac{2}{3}}=\varepsilon^{\frac{2}{3}}r^{2\alpha}. \tag{8.82}$$

这是著名的 2 阶结构的"2/3 次方"定律，其中 2α 称为 2 阶结构函数标度指数.

在(8.82)式中，若将 r 变成 λr，则 2 阶结构函数满足如下自相似标度定律

$$S_2(\lambda r)=\lambda^{2\alpha}S_2(r), \tag{8.83}$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{3}. \tag{8.84}$$

速度差是 $\Delta v(r)=(u(x+r)-u(x))\propto r^\alpha$. α 称为速度差的标度指数.

由(8.82)式求得湍流耗散率 ε 和尺度 r 的关系为

$$\varepsilon=\frac{(S_2(r))^{\frac{3}{2}}}{r}=r^{3\alpha-1}. \tag{8.85}$$

由于 $\alpha=\dfrac{1}{3}$，所以在科尔莫戈罗夫假设下，湍流耗散率 ε 是和 r 无关的常数.

对于 q 阶结构函数，有

$$S_q(r)=\langle[u(x+r)-u(x)]^q\rangle\propto\varepsilon^{\frac{q}{3}}r^{\frac{q}{3}}. \tag{8.86}$$

(8.86)式说明，q 阶结构函数的标度指数为 $\xi_q=\dfrac{q}{3}$.

顺便指出，对于尺度 r 远小于科尔莫戈罗夫微尺度 η 的耗散区，由科尔莫戈罗夫"假设一"得到

$$S_2(r)\propto\frac{\varepsilon}{\nu}r^2\quad(r\ll\eta). \tag{8.87}$$

科尔莫戈罗夫还证明：

$$S_3(r)=-\frac{4}{5}\varepsilon r+6\nu\frac{\mathrm{d}S_2(r)}{\mathrm{d}r}. \tag{8.88}$$

对于惯性区，3 阶结构函数 S_3 为

$$S_3(r)=-\frac{4}{5}\varepsilon r. \tag{8.89}$$

这是很重要的一个结果，所有湍流理论，充分发展的湍流都要满足(8.89)式，或把它看成是湍流边界条件. 实际上，在科尔莫戈罗夫关系式(8.88)中只要令惯性区和 ν 无关，即 $\nu=0$，就直接得到(8.89)式. 与(8.83)关系相似，3 阶结构函数满足自相似的标度律

$$S_3(\lambda r)=\lambda^{3\alpha}S_3(r)=\lambda S_3(r). \tag{8.90}$$

(8.90)式再一次证实湍流的科尔莫戈罗夫标度指数 $\alpha=\dfrac{1}{3}$，即(8.84)式.

在实际中常用速度差

$$\Delta v(r)=\begin{cases}\sqrt{S_2(r)}=\sqrt{\langle[u(x+r)-u(x)]^2\rangle}, & r\leqslant L,\\ \sqrt{u(x+r)u(x)}, & r>L,\end{cases}\tag{8.91}$$

这样，由 $S_2(r)$ 或 $S_3(r)$ 得到

$$\Delta v(r)\propto\varepsilon^{\frac{1}{3}}r^{\frac{1}{3}},r\leqslant L.\tag{8.92}$$

(8.92)式再一次说明，速度差的标度指数为 $\alpha=\dfrac{1}{3}$.

一般来说，湍流速度差 $\Delta v(r)$ 的概率密度分布不是高斯正态分布. 图 8.21 是风洞实验结果. 图中纵坐标是 $\sigma f(\Delta v(r))$，采用对数坐标，横坐标是 $\dfrac{\Delta v(r)}{\sigma}$，采用线性坐标，$\sigma^2=\langle(\Delta v(r))^2\rangle$，图中虚线是标准的高斯分布.

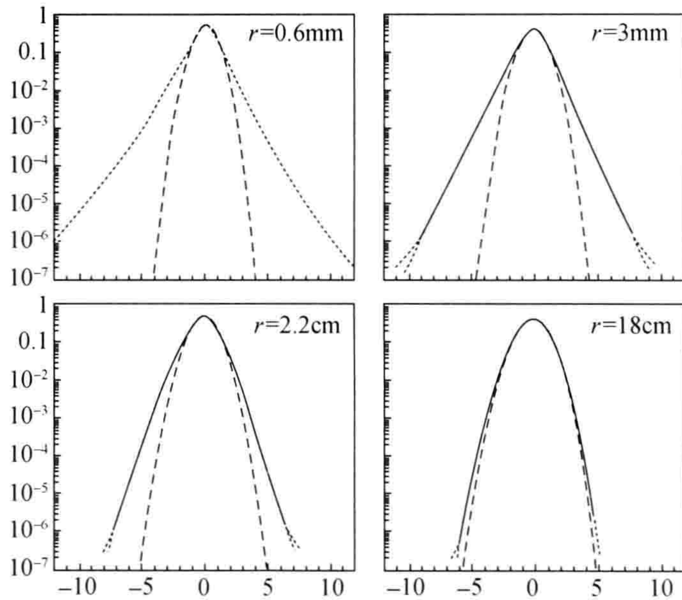


图 8.21 湍流速度差 Δv 的概率密度

从图 8.21 看出，仅大尺度（r 比较大）的涡旋的概率密度 $f(\Delta v(r))$ 才接近于正态分布，这是因为尺度较大时各种尺度的涡旋随机地对速度差都有影响. 一般在尺度 r 比较小时，两点的速度差 $\Delta v(r)$ 是强烈相关的，它们受局部涡旋的影响较大，因而 $\Delta v(r)$ 的概率密度绝不是正态分布，其概率密度 $f(\Delta v(r))$ 的尾巴愈来愈长，表明速度差 $\Delta v(r)$ 的涨落振幅比较大时，虽然其概率并不大，但仍有一定的概率，也说明尺度愈小，湍流强度愈强. 这种大涨落在湍流中起着非常大的作用.

若用偏斜度(8.60)式和陡峭度(8.61)式考虑，对大尺度 r，$S=0$，$F=3$. 在 r 比较小时，莫宁(Monin)得到 $S=0$，$F\approx4$.

在局地各向同性湍流中，两点速度差 $\Delta v(r)$ 的概率密度分布的偏斜度可以表示为

$$S=\frac{S_3(r)}{[S_2(r)]^{3/2}}. \tag{8.93}$$

根据科尔莫戈罗夫"第二假设"，在惯性区 S 仅是 ε 和 r 的函数，但是由于 ε 和 r 两者不能构成无量纲量 S，因而在惯性区 S 只能是常数，故由(8.93)式，得

$$S_3(r)=S[S_2(r)]^{\frac{3}{2}}=S(A\varepsilon^{\frac{2}{3}}r^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=-\frac{4}{5}\varepsilon r=-SA^{\frac{3}{2}}\varepsilon r. \tag{8.94}$$

实验结果 $S=0.4$，故 $A=1.6$.

将 S 为常数代入科尔莫戈罗夫方程(8.88)，得到

$$6\nu\frac{\mathrm{d}S_2(r)}{\mathrm{d}r}+|S|[S_2(r)]^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{5}\varepsilon r. \tag{8.95}$$

令 $y=S_2(x)$，$x=\dfrac{r}{\eta}$，则(8.95)式化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{15}y^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{15}x. \tag{8.96}$$

(8.96)式是描述2阶结构函数 y 和尺度 x 的关系的常微分方程.

由"第二假设"，主要是把第一假设(8.79)式的 Π_2 设为常数，即得惯性区的能谱

$$S(k)=C\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}. \tag{8.97}$$

(8.97)式说明，均匀各向同性湍流功率谱的标度指数为 $-\dfrac{5}{3}$. 显然，该能谱满足波数空间的自相似标度律

$$S(\lambda k)=\lambda^{-\frac{5}{3}}S(k). \tag{8.98}$$

对于被动湍流标量，如位温 θ，它在平衡区和惯性子区的能谱分别可写成

$$S_\theta(k)\propto\varepsilon_\theta\,\varepsilon^{-\frac{1}{3}}k^{-\frac{5}{3}}F(k\eta) \quad (\text{平衡区}),$$

$$S_\theta(k)\propto\varepsilon_\theta\,\varepsilon^{-\frac{1}{3}}k^{-\frac{5}{3}} \quad (\text{惯性子区}),$$

其中，ε_θ 是分子热耗散率，它的单位是度^2/秒.

如何从物理上论证湍流功率谱的标度指数是 $-\dfrac{5}{3}$ 仍然是没有解决的问题. 从拓扑上讲，由于非线性的局部不稳定(伸长)和整体稳定(折叠)，常形成流体中两边差异较大的奇异性表面，图 8.22(a)，(b)，(c)是常见的三种. 图 8.22(a)是嵌入在三维空间的康托尔表面. 如果将初始尺度缩减到 $\dfrac{1}{8}$，则这个康托尔表面的维数就是 $D=2+\dfrac{\ln 2}{\ln 8}=\dfrac{7}{3}$. 这种类型的表面可以由流场方向的倒向产生. 图

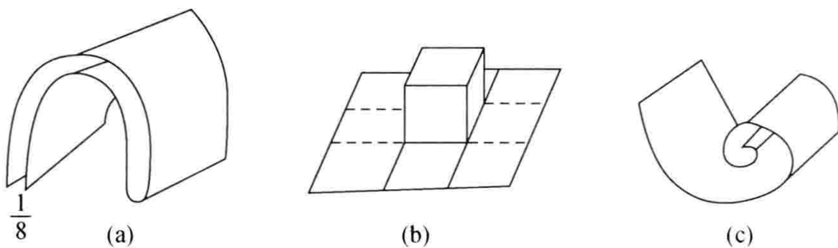


图 8.22 奇异性表面

(a) 康托尔表面;(b) 涡旋伸长;(c) 螺旋

8.22(b)表面是由于涡旋伸长,使初始平滑的表面变成 13 个小的方块,其维数是 $D=\frac{\ln 13}{\ln 3}\approx 2.334$. 图 8.22(c)表面是常见的一种螺旋表面. 可以证明,这个表面与它的垂直平面的交集是螺旋线 $r=\theta^{-2}$,它与通过原点直线的交集是点集,其维数 $D'=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$. 其中的数字 2 就是对数螺旋的指数"$-2$"中的数字 2,因而螺旋表面的维数 $D=D'+2=\frac{7}{3}$. 这三个表面的分数维几乎都是$\frac{7}{3}$,那么湍流点集的分数维 $D'=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$. 若认为湍流速度曲线是沿着上述分形表面的两边运动的,那么这条曲线的维数就是 $1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$. 按(5.28)式,此分形速度曲线的赫斯特指数 $H=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$,它就是(8.84)式中的 α. 此时湍流功率谱的指数按(5.32)式为

$$\beta=2H+1=\frac{5}{3}. \tag{8.99}$$

(8.99)式中 $2H$ 是 2 阶结构函数的指数,也就是说湍流功率谱指数是 2 阶结构函数指数加 1.

由于科尔莫戈罗夫均匀各向同性湍流模型由大涡旋级联到小涡旋是按照一分为二、二分为四这样的方式进行的,若设原来尺度为 1 的小立方体,即 $r_0=1$,然后级联成尺度为 $r_1=\frac{1}{2}$的小立方体,此时小立方体的个数为四,n 级级联以后,尺度为$\frac{1}{2^n}$,小立方体的个数为 2^n,见图 8.23,那么按照分数维的定义,小立方体的体积和尺度的关系为

$$V=r^{\mu}, \tag{8.100}$$

即

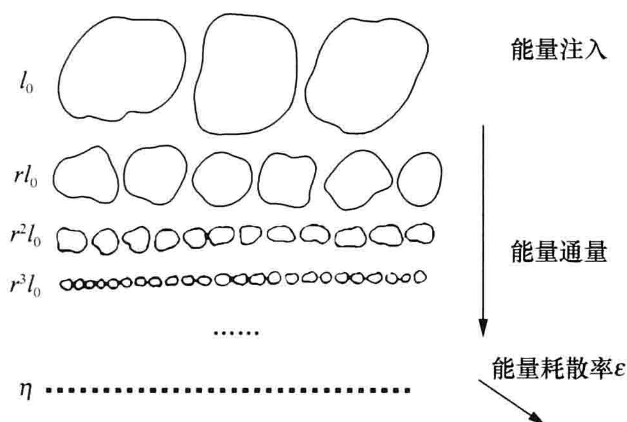


图 8.23 湍流科尔莫戈罗夫模型级联过程

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)^3=\left(\frac{1}{2^n}\right)^\mu. \tag{8.101}$$

对(8.101)式两边取对数，得

$$3(\ln1-n\ln2)=\mu(\ln1-n\ln2),$$

可求得

$$\mu=3\,\frac{(\ln1-n\ln2)}{(\ln1-n\ln2)}=3. \tag{8.102}$$

由于 $\mu=3$，公式(8.101)和普通的实立方体的体积相同，因此均匀各向同性湍流的分数维

$$D=\mu=3. \tag{8.103}$$

§8.6 间歇湍流的β模型

科尔莫戈罗夫模式认为湍流是充满空间的，而实际上小涡旋并不充满空间，那么活动涡旋所占的概率按(2.17)式为

$$p(r)\propto r^{d-D}, \tag{8.104}$$

见图 8.24. 仍假设惯性子区中能量通量就是湍流动能耗散率 ε，但只由活动涡旋那一部分耗散，即

$$\langle\varepsilon\rangle=p(r)\frac{(\Delta v(r))^3}{r}\approx r^{3-D}\frac{(\Delta v(r))^3}{r}, \tag{8.105}$$

由此求得

$$\Delta v(r)\sim r^{\frac{D-2}{3}}. \tag{8.106}$$

将它和(8.84)式比较，得到β模型的速度差的标度指数为

$$\alpha=\frac{D-2}{3}. \tag{8.107}$$

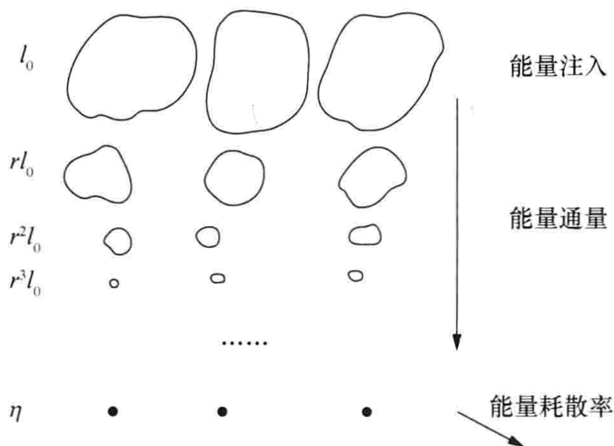


图 8.24 湍流 β 模型级联过程

同样,能量$(\Delta v(r))^2$ 也只是针对活动涡旋那一部分,即

$$S_2(r)=\langle(\Delta v(r))^2\rangle\approx p(r)(r^{\frac{D-2}{3}})^2=r^{3-D}r^{\frac{2(D-2)}{3}}=r^{\frac{2}{3}+\frac{3-D}{3}}. \tag{8.108}$$

将它和(8.82)式比较看出,2 阶结构函数的标度指数为

$$\xi_2=\frac{2}{3}+\frac{3-D}{3}. \tag{8.109}$$

由 2 阶结构函数和功率谱之间的关系(8.99)式,得到

$$\beta=\xi_2+1=\left(\frac{2}{3}+\frac{3-D}{3}\right)+1=\frac{5}{3}+\frac{3-D}{3}, \tag{8.110}$$

所以 β 模型的功率谱表达式为

$$S(k)\approx k^{-\left(\frac{5}{3}+\frac{3-D}{3}\right)}. \tag{8.111}$$

(8.108)和(8.111)式合起来称为间歇湍流的 β 模型. 这里,β 就是(8.104)式中的 $p(r)$,即每级联一次,小涡旋的个数以 $\beta=p(r)$的倍数增加. 显然当 $D=3$ 时,(8.107)式,(8.109)式和(8.111)式就退化为科尔莫戈罗夫的结果:$\alpha=\frac{1}{3}$,$\xi_2=\frac{2}{3}$,功率谱指数 $\beta=\frac{5}{3}$.

将此结果用于 q 阶矩,

$$\langle\varepsilon^q\rangle=p(r)\left[\frac{(\Delta v(r))^3}{r}\right]^q. \tag{8.112}$$

下面我们来求 q 阶结构函数 $S_q(r)$的标度指数. 若(8.88)式中 q 阶结构函数 $S_q(r)$的标度指数为 ξ_q,即

$$S_q(r)=\langle((\Delta v(r))^q)\rangle\propto r^{\xi_q}. \tag{8.113}$$

按照(8.86)式,对科尔莫戈罗夫理论,

$$\xi_q=\frac{q}{3}. \tag{8.114}$$

若设湍流能量耗散率 $\varepsilon(r)$ 不是常数，而是随尺度变化，且它的 q 阶矩的标度指数为 τ_q，即

$$\langle(\varepsilon(r))^q\rangle \propto r^{\tau_q}, \tag{8.115}$$

由(8.92)式，得

$$(\Delta v(r))^q \propto \varepsilon^{\frac{q}{3}} r^{\frac{q}{3}} \tag{8.116}$$

或

$$\langle(\Delta v(r))^q\rangle \propto r^{\frac{q}{3}} \langle(\varepsilon(r))^{\frac{q}{3}}\rangle \propto r^{\frac{q}{3}} r^{\tau_{q/3}}. \tag{8.117}$$

将(8.117)式和(8.113)式比较，得到

$$\xi_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}. \tag{8.118}$$

比较(8.118)式和(8.113)式看出，在科尔莫戈罗夫理论中 $\tau_q=0$，即 ε 为常数，然而实验表明，湍流动能耗散率 ε 有极大的随机性，即(8.115)式中 $\tau_q \neq 0$. 物理上讲，小尺度湍流涡旋并不充满空间，即湍流是间歇的和奇异的，怎么来描述这种非均匀性呢？若湍流是均匀的，如科尔莫戈洛夫均匀各向同性湍流理论，只要用一个标度指数 $\alpha=\frac{1}{3}$ 就可以描述了. 现在，由于湍流是非均匀的应该用不同的标度指数，由(8.114)式看，均匀湍流 q 阶矩的标度指数是 $\alpha q\left(\text{其中 } \alpha=\frac{1}{3}\right)$，在非均匀情况，$\alpha$ 不再是常数，而应该是 $\alpha(q)$. 这就是上一章多重分形的观点.

重新考虑(8.117)式并利用(8.104)式($d=3$)，有

$$\begin{aligned} S_q &= \langle(\Delta v(r))^q\rangle = \int (\Delta v(r))^q p[\Delta v(r)] \mathrm{d}(\Delta v(r)) \\ &= \int r^{\alpha q} r^{3-D} \mathrm{d}(\Delta v(r)) \propto r^{\xi_q}. \end{aligned} \tag{8.119}$$

当 $r\to 0$ 时，对上面积分贡献最大的是 $\alpha q+3-D$ 的最小项，即

$$\xi_q = \min_{\alpha}(\alpha q + 3 - D), \tag{8.120}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\xi_q}{\mathrm{d}\alpha} = q - \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\alpha} = 0,$$

即

$$\left.\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(q)} = q. \tag{8.121}$$

这样

$$\xi_q = \alpha(q) q + 3 - D[\alpha(q)]. \tag{8.122}$$

由(8.122)式，求得

$$\frac{\mathrm{d}\xi_q}{\mathrm{d}q}=\alpha(q)+q\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q}-\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q}=\alpha(q)+\left(q-\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q}=\alpha(q), \tag{8.123}$$

因此若已知速度差 q 阶矩的标度指数 ξ_q，则由(8.123)式就可以求得速度差的标度指数 α，再由(8.122)式求出分数维 D. (8.121)，(8.122)式和(8.123)式就是多重分形在湍流中的表达式.

对科尔莫戈罗夫湍流，$\xi_q=\frac{q}{3}$，因而由(8.123)式，得

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\xi_q}{\mathrm{d}q}=\frac{1}{3}, \tag{8.124}$$

即速度差标度指数为$\frac{1}{3}$. 将 ξ_q 和 α 代入(8.122)式，得到

$$\frac{q}{3}=\frac{1}{3}q+3-D,$$

故

$$D=3. \tag{8.125}$$

这就说明科尔莫戈罗夫湍流的标度指数是常数 $\alpha=\frac{1}{3}$，即湍流充满三维空间，无间歇.

再介绍一种由伯格斯(Burgers)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.126}$$

产生的激波湍流. 当 $q\geqslant 1$ 时，通常有 $\xi_q=1$. 因为只考虑有活动涡旋的部分，由(8.105)式求得 ε 的 q 阶矩为

$$\langle\varepsilon^q\rangle=p(r)\left(\frac{\langle\varepsilon\rangle}{p(r)}\right)^q=\langle\varepsilon\rangle^q[p(r)]^{1-q}=\langle\varepsilon\rangle^q r^{(d-D)(1-q)}. \tag{8.127}$$

将(8.127)式与(8.115)式比较，得

$$\tau_q=(3-D_q)(1-q), \tag{8.128}$$

再由(8.118)式，得

$$\xi_q=\frac{q}{3}+(3-D_q)\left(1-\frac{q}{3}\right). \tag{8.129}$$

由此看出，若 $D=3$，则 $\xi_q=\frac{q}{3}$，此即科尔莫戈罗夫湍流.

由(8.129)式，若 $D=2$，有

$$\xi_q=1, \tag{8.130}$$

再由(8.123)，得 $\alpha=0$，故伯格斯湍流的速度差标度指数为 $\alpha=0$，维数 $D=2$.

从分形角度看，β 模型是分形维数 $2\leqslant D\leqslant 3$ 的湍流模型.

§ 8.7　余湍流模型

余湍流模型是中国学者余振苏于 1994 年建立的. 模型中

$$\xi_q=\gamma q+C(1-\beta^q),\tag{8.131}$$

其中，参数 $\beta\in[0,1]$，γ 为常数. 将(8.131)式对 q 求导数并由(8.123)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\xi_q}{\mathrm{d}q}=\gamma-C\beta^q\ln\beta=\alpha(q),\tag{8.132}$$

所以标度指数 α 是随 q 变化，即湍流是间歇性的.

余湍流模型包含了科尔莫戈罗夫湍流和伯格斯湍流. 当 $\beta=1$ 时，由(8.131)式得到

$$\xi_q=\gamma q=\frac{q}{3}\quad\left(\gamma=\frac{1}{3}\right),\tag{8.133}$$

这就是科尔莫戈罗夫湍流. 当 $\beta\to 0$ 时，由(8.132)式并按求极限的洛必达法则，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi_q}{\mathrm{d}q}&=\gamma-C\,\frac{\ln\beta}{\beta^{-q}}=\gamma-C\,\frac{\beta^{-1}}{(-q)\beta^{-q-1}}\\&=\gamma+\frac{C}{q}\beta^q=\gamma=\alpha=0,\end{aligned}\tag{8.134}$$

这就是伯格斯湍流. 因此常说余湍流介于伯格斯湍流($\beta=0,\alpha=0,D=2$)和科尔莫戈罗夫湍流$\left(\beta=1,\alpha=\frac{1}{3},D=3\right)$之间.

现在讨论余湍流模型中参数 γ 和 C 的意义. 由(8.132)式，在 $q\to+\infty$时，式中第一个等号右边的第二项原来为正，现在变为 0，故

$$\gamma=\alpha_{\min},\tag{8.135}$$

而 $\Delta v\propto r^{\alpha_{\min}}$ 就表示速度差 Δv 的涨落最大，因此 γ 代表最强涨落的标度指数. 同样，由(8.122)式，在 $q\to+\infty$时，

$$3-D=\xi_q-\alpha q=\gamma q+C(1-\beta^q)-\gamma q=C(1-\beta^q).\tag{8.136}$$

在 $q\to+\infty$时，上式右端达到最大值 C，即余维数 $3-D=C$ 最大，或者 D 最小，所以速度差 Δv 的涨落最强时对应于 $\alpha_{\min}$ 和 $D_{\min}$.

在余模型(8.131)中，我们要求 3 阶结构函数的标度指数为 1，即 $\xi_3=1$. 在(8.131)式中令 $q=3$，得到

$$1=3\gamma+C(1-\beta^3).\tag{8.137}$$

此时(8.131)式中的常数 C 为

$$C=\frac{1-3\gamma}{1-\beta^3},\tag{8.138}$$

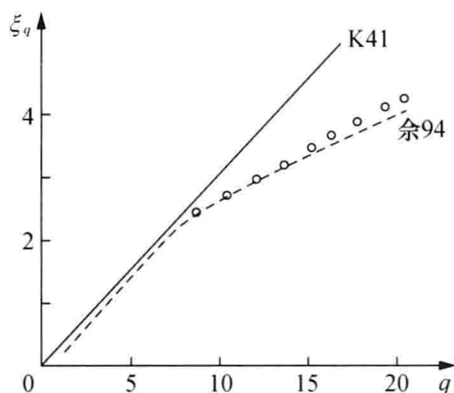


图 8.25　ξ_q对 q 的曲线

这样(8.131)式就为

$$\xi_q=\gamma q+\frac{1-3\gamma}{1-\beta^3}(1-\beta^q). \quad (8.139)$$

余振苏在(8.139)式中取了 $\gamma=\frac{1}{9}$,$\beta=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

图 8.25 表明余模型和科尔莫戈罗夫模型 ξ_q的差别.

图中圆点代表实验结果. 由图 8.25 看出,间歇湍流的余模型和实测结果更接近,尤其是高阶矩.

§8.8　对数正态模型

实际上这个模型是科尔莫戈罗夫和奥布霍夫 在 1960 年第一个建立的间歇湍流模型. 该模型有一个自由参数 μ,可以比较合理地预测 q 阶矩标度指数随 q 的变化. 虽然 β 模型是最简单的间歇湍流模型,包含了科尔莫戈罗夫和伯格斯湍流模型,但是从 q 阶矩的表达式(8.129)式来看,其标度指数 ξ_q仍和 q 成线性关系,见图 8.26. 和实际湍流的高阶矩相比,β 模型和科尔莫戈罗夫模型都存在缺陷. 高阶矩的这种差异主要是由于小尺度的涨落有时很大,仍有一定的概率对 ε 有贡献,所以科尔莫戈罗夫和奥布霍夫假设湍流耗散率符合概率尾巴相对

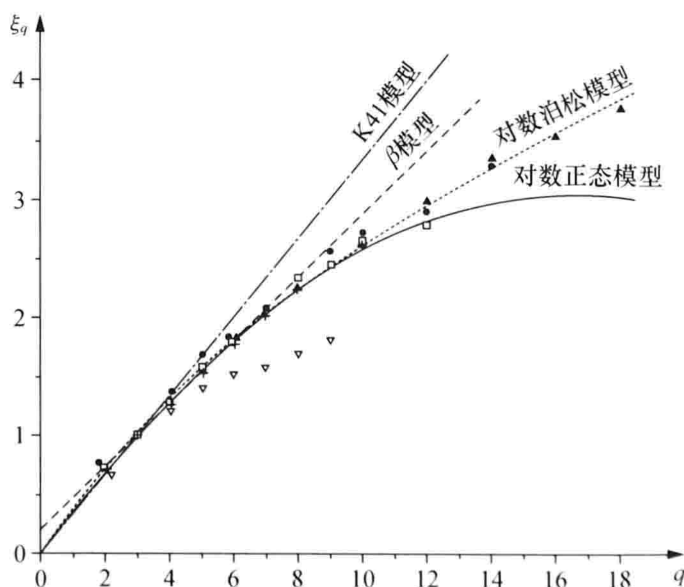


图 8.26　湍流各种模型的 ξ_q 随 q 的变化

引自 U. Frish(1995)

较长的对数正态分布，即

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}f(\ln\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\ln\varepsilon-m)^2}, \tag{8.140}$$

那么 ε 的 q 阶矩 $\langle\varepsilon^q\rangle$ 即为

$$\langle\varepsilon^q\rangle=\int\varepsilon^q f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon. \tag{8.141}$$

令

$$y=\ln\varepsilon, \tag{8.142}$$

(8.141)式变成

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon^q\rangle &= \int\varepsilon^q\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\\ &= \int\mathrm{e}^{qy}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{8.143}$$

令

$$y=\sigma x+m,\quad \mathrm{d}y=\sigma\mathrm{d}x, \tag{8.144}$$

(8.143)就为

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon^q\rangle &= \int\mathrm{e}^{q(\sigma x+m)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{qm}\int\mathrm{e}^{q\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{qm}\mathrm{e}^{\frac{q^2\sigma^2}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-q\sigma)^2}{2}}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{qm+\frac{q^2\sigma^2}{2}}.\end{aligned} \tag{8.145}$$

由于像图 8.24 那样的级联过程，对数正态分布的方差 σ^2 随尺度 r 减小而变化，可以设

$$\sigma^2=\mu\ln\frac{1}{r}, \tag{8.146}$$

并令 $m=-\frac{\sigma^2}{2}$，那么代入(8.145)式，得

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon(r)^q\rangle &\sim \mathrm{e}^{-q\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2}q^2}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{q}{2}(q-1)\sigma^2}\\ &= \mathrm{e}^{\mu\ln\frac{1}{r}\frac{q}{2}(q-1)}\\ &= (\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{r}})^{\frac{\mu q}{2}(q-1)}\\ &= r^{-\frac{\mu}{2}q(q-1)}.\end{aligned} \tag{8.147}$$

按照(8.115)式,耗散率 $\varepsilon(r)$ 的 q 阶矩的标度指数 τ_q 为

$$\tau_q = -\frac{\mu}{2}q(q-1). \tag{8.148}$$

按(8.118)式,速度差的 q 阶标度指数为 ξ_q 为

$$\begin{aligned}\xi_q &= \frac{q}{3} + \tau_{\frac{q}{3}} \\ &= \frac{q}{3} + \left[-\frac{\mu}{2}\frac{q}{3}\left(\frac{q}{3}-1\right)\right] \\ &= \frac{q}{3} + \frac{\mu q}{18}(3-q).\end{aligned} \tag{8.149}$$

在(8.149)式中,当 $q=3$ 时,$\xi_3=1$. 这和科尔莫戈罗夫一致,但是由(8.149)式看出 ξ_q 随 q 的变化是非线性的,见图 8.26.

应该特别指出,佘模型实际上就是对数泊松模型.

对于给定尺度 r,湍流能量耗散率

$$\varepsilon(r) \sim r^{\gamma}\beta^{n}, \tag{8.150}$$

其中 n 是独立的泊松随机变量.带有平均值为 λ 的泊松分布

$$p(n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots, \tag{8.151}$$

因此,ε 的 q 阶矩

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon(r)^q \rangle &= r^{\gamma q}\sum_n \beta^{nq} p(n) \\ &= r^{\gamma q}\sum_n \beta^{nq}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= r^{\gamma q}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum \frac{(\lambda\beta^q)^n}{n!} \\ &= r^{\gamma q}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda\beta^q} \\ &= r^{\gamma q}\mathrm{e}^{-\lambda(1-\beta^q)}.\end{aligned} \tag{8.152}$$

若是对数正态分布,则上式变成

$$\langle \varepsilon(r)^q \rangle \sim r^{\gamma q - \lambda(1-\beta^q)}, \tag{8.153}$$

即 $\varepsilon(r)$ 的 q 阶矩的标度指数为

$$\tau_q = \gamma q - \lambda(1-\beta^q). \tag{8.154}$$

这和佘模型一致.

小　结

湍流是个物理学的老难题. 自从有了混沌、分形之后,人们对湍流的认识大大提高了. 混沌的多尺度反映在倍周期分岔或拟周期通向混沌之路,将混沌的点集分割成两标度的康托尔集. 从分形的观点看,科尔莫戈罗夫湍流相当于分形维数 $D=3$,它表示湍流充满空间. 伯格斯湍流相当于维数 $D=2$. 实际的湍流的维数介于 2 和 3 之间,它们是间歇湍流.

第九章　时间序列的分形

为何时间序列会与分形相联系呢？前面几章我们多次提到的处处不可微的函数就和时间序列很相似，因为所谓时间序列，就是隔一定时间间隔（例如每天一次、每月一次等）所观测到的物理量的数值，将这数值相连接起来必然是处处不可微的函数．这恰恰就是分形的特征之一．本章着重介绍目前对混沌时间序列研究常用的一些概念和方法．

§9.1　相空间和相轨迹

研究时间序列的分形，不单是求出一个维数而已，我们的目的是预测，因此最理想的方法是从时间序列中建立一个能用公式表示的不同时刻物理量之间的关系．例如映射离散动力系统

$$x_{n+1}=f(x_n),n=0,1,2,\cdots \tag{9.1}$$

或连续动力系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x}) \tag{9.2}$$

都是物理量状态 x_n 或 $\boldsymbol{x}$ 随时间变化的系统．为此我们需要确定所研究的物理量．例如若我们要研究猫出生以后健康状况随时间的演化，我们可以用猫的重量 $x_1=N$，身高 $x_2=H$，茸毛的数目 $x_3=M$（即单位面积上茸毛的数量）这三个变量来描述．若以 x_1,x_2,x_3 为坐标轴，它们就构成一个相空间（x_1,x_2,x_3），相空间中的每一点就相应于一个向量 $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$，它代表猫健康的瞬时状态，见图 9.1(a)．另外，猫的食品的营养 μ 可以作为一个参数，这样，从猫出生（$t=0$）开始，随着时间的流逝，猫的映射状态沿着一条曲线移动，它们在相空间就形成状态的一条轨迹，这就叫相轨迹，见图 9.1(b)．有 x_1,x_2,x_3 三个状态变量随时间演化就形成三维自治动力系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=f_1(x_1,x_2,x_3,\mu),\\ \dot{x}_2&=f_2(x_1,x_2,x_3,\mu),\\ \dot{x}_3&=f_3(x_1,x_2,x_3,\mu).\end{aligned} \tag{9.3}$$

若在(9.3)式中将 $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ 分别看成是速度向量 $\boldsymbol{v}(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)$ 的三个分量，那么速度 $\boldsymbol{v}$ 的散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{9.4}$$

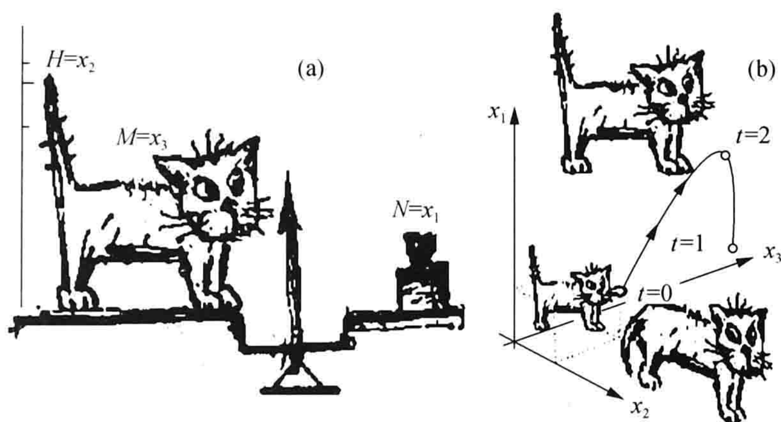


图 9.1 猫健康状态的演化

就代表流体流出去的体积量. 若$\nabla \cdot \boldsymbol{v}=0$,就表示流出去的等于流进来的,则该系统是保守系统. 若$\nabla \cdot \boldsymbol{v}<0$,表示流出去的比流进来的少,因此该系统是耗散系统. 见图 9.2,其中 V 代表相空间体积.

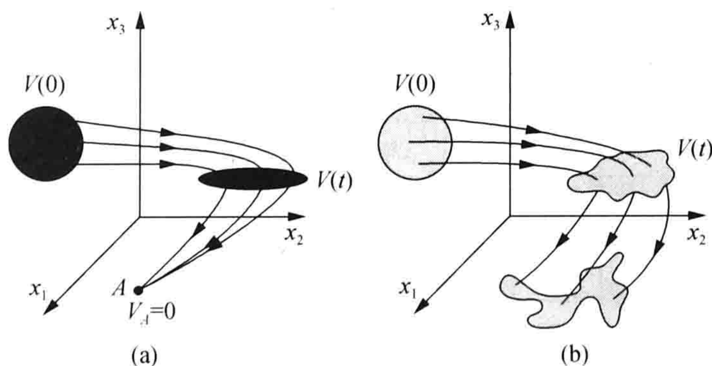


图 9.2 相空间体积的变化

(a) 耗散系统;(b) 保守系统

在三维动力系统常见的运动形态有四种,在耗散系统中,称为四种吸引子:

(1) 定常状态. 它在向空间中是一个点,表现在状态随时间不变化.

(2) 极限环. 它在相空间中是一条闭合曲线,状态随时间以周期为 T 变化.

(3) 二维环面上的拟周期运动. 它随时间变化的图像,带有两个特征周期 T_1 和 T_2,且它们的比是无理数.

(4) 非周期的混沌运动. 它们在相空间中,在有界区域内形成分形集合.

它们在相空间的轨迹及相应的时间序列见图 9.3.

从图 9.3 看出,我们重点是研究混沌状态的时间序列.

表 9.1 列出这种吸引子的特征,其中的李雅普诺夫(Lyapunov)指数和 K 熵下面我们将会说明.

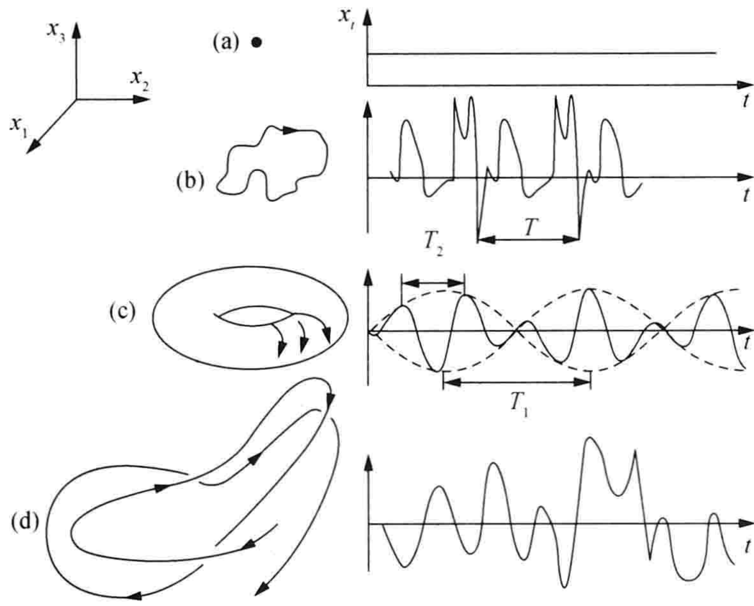


图 9.3　三维动力系统的四种吸引子和相应的时间序列

(a) 定常吸引子;(b) 周期吸引子;(c) 拟周期吸引子;(d) 混沌吸引子

表 9.1　三维相空间中四种吸引子特征

相轨迹	时间序列	功率谱	自相关函数	李雅普诺夫指数	分数维	K 熵
x_3, x_1, x_2	x_1, t	$S(f)$, f	$R(\tau)$, τ	(−,−,−)	0	0
x_3, x_1, x_2	x_1, t	$S(f)$, f	$R(\tau)$, τ	(0,−,−)	1	0
x_3, x_1, x_2	x_1, t	$S(f)$, f	$R(\tau)$, τ	(0,0,−)	2	0
x_3, x_1, x_2	x_1, t	$S(f)$, f	$R(\tau)$, τ	(+,0,−)	$2<D<3$	>0

以上说明,要描述物理状态的演化,理想的方法是建立离散或连续动力系统.

§9.2　重构相空间的原因

大家知道，单摆方程为

$$\ddot{x}+x=0$$

或

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x,\end{cases}\tag{9.5}$$

其中“·”“··”分别表示对时间的一阶和二阶导数．由(9.5)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$$

或

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0,$$

所以，在状态(相)空间(x,y)中，单摆的轨道是一个圆，如图9.4．单摆方程为

$$x^2+y^2=C,\tag{9.6}$$

因此任何一个时刻的位置及其速度就是按照图9.4中的箭头移动所确定的．相空间(x,y)中的每一点(x,y)只有一个位置x和速度y，但是方程(9.5)的解却是

$$x=\cos t,\tag{9.7}$$

是一个时间序列．轨迹和时间序列有什么关系呢？例如按图9.4的箭头$A\to O\to B\to O'\to A\to\cdots$得到时间序列$1,0,-1,0,1,\cdots$，从$x$轴上看如图9.5．它是$x$轴上$A$，$B$两点之间的来回振荡．这种振荡的情况并不是轨道，因为它们在某一点上(如P点)既可能向左，也可能向右运动，也就是说在同一时刻t，它们有可能有不同的位置x或者速度y，与轨道的概念(即某一时刻只有唯一的位置和速度)相矛盾，也就是和实际状态的演化相抵触．实际上，时间序列只是图9.4的圆形轨道在x轴上的投影，我们不能把这种投影构成的时间序列看成是一个动力学系统轨道，因此时间序列并不能代表系统状态随轨道的演化．

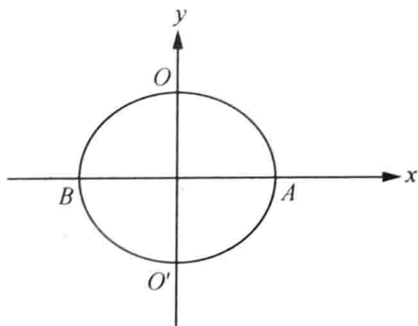


图9.4　状态空间(x,y)中单摆的轨道



图9.5　时间轴上的状态变化

如何用一个变量的时间序列构造系统的相空间呢？上述例子中，投影的时间序列只有一个坐标 x，相平面的另一个坐标可以用 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 求得，这样两个坐标 (x,y) 就构成了一个相平面.

对一个 n 维自治动力系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \qquad\cdots\cdots\\ \dot{x}_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{cases}\tag{9.8}$$

其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 就是该系统状态(相)空间的坐标.

也可以对(9.8)式微商消去 $(x_2,\cdots,x_n)$ 得到 x_1 的 n 阶微分方程

$$x_1^{(n)}=f(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1,\cdots,x_1^{(n-1)}).\tag{9.9}$$

此时，状态空间的坐标轴就由 x_1 的各阶导数 $(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1,x_1^{(n-1)})$ 来代替，这种替代并不损失该动力系统演化的信息，导数是由不同时刻的时间序列值

$$x(t),x(t+\tau),x(t+2\tau),\cdots,x(t+(n-1)\tau)\tag{9.10}$$

的差构成的，其中 τ 称为延迟参数. $x(t+\tau)$ 就是 $x(t)$ 微商的结果，即 $x(t+\tau)=x(t)+\dot{x}(t)\tau$，或 $\dot{x}=\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau}$，同样 $x(t+2\tau)$ 可以认为是二阶微商的结果.因为 $\ddot{x}$ 近似可以表示成为 $\ddot{x}\approx\frac{x(t+2\tau)-2x(t+\tau)+x(t)}{2\tau}$，其他类似，即(9.10)式的各个值，可以认为是 x 的各阶微商的结果. 这样 $x(t)$ 以及延迟 $\tau,2\tau,\cdots,(n-1)\tau$ 的 x 值形成 n 个坐标，代表相空间中的一个点，因此由(9.10)式的延迟时间序列来构造相空间是合理的.

§9.3 塔肯斯定理

时间序列已经有很长的研究历史，并已经有广泛的应用，那么为什么现在还要嵌入一个相空间呢？传统的统计方法大部分使用线性模型，因此不能得到最新的非线性动力学的研究成果. 现在已经广泛认识到，即使最简单的非线性机制也能产生复杂的时间变化状态——混沌和复杂的混沌时间序列. 传统的统计方法没有认识到混沌时间序列是由确定的系统产生的，而是把这种时间序列归结为随机噪声，因此用传统的统计方法去模拟和预测这些时间序列往往导致失败，并不能获得重要有用的信息. 然而，塔肯斯(Takens)发现，从一个未知的确定的动力系统所产生的时间序列能够重构出该未知系统的动力学形式，这就大

大加强了研究混沌时间序列的基础.

如果原来动力系统的吸引子的维数是 d_A，得到的一系列观测数据为

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \tag{9.11}$$

那么，用这些数据(时间序列)来重构的相空间的维数 n 为多少呢？进一步，例如当 $n=3$ 时，构造方式是

$$(x_0, x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_4), \cdots \tag{9.12}$$

还是

$$(x_0, x_2, x_4), (x_1, x_3, x_5), (x_2, x_4, x_6), \cdots \tag{9.13}$$

等该如何判断？塔肯斯定理的回答是，嵌入的维数 n 要满足

$$n \geqslant 2d_A + 1. \tag{9.14}$$

对于这个定理我们不予证明，只加以说明. 设集合 A 和 B 的维数分别为 d_A 和 d_B，若把该问题放在 d 维空间来讨论，那么集合 A, B 和 $A \cap B$ 的余维数分别为

$$d-d_A, d-d_B, d-d_{A\cap B}.$$

余维数有好的相加性质：

$$d-d_A+d-d_B=d-d_{A\cap B},$$

故得到

$$d_{A\cap B}=d_A+d_B-d. \tag{9.15}$$

我们可以用几个例子来验证(9.15)式的正确性.

首先看两条曲线在平面上的相交. 因为曲线 A 和 B 的维数分别为 $d_A=d_B=1$，平面的维数 $d=2$，由(9.15)式得，其交集的维数 $d_{A\cap B}=1+1-2=0$. 这说明两条曲线在平面上一般相交成点，点的维数是零.

再看两条曲线在三维空间的相交情况. 曲线 A 和 B 的维数分别是 $d_A=d_B=1$，而三维空间的维数 $d=3$，由(9.15)式得 $d_{A\cap B}=1+1-3=-1$，这说明两条曲线在三维空间中一般不相交.

最后看在三维空间中一条曲线与一个曲面能否相交. 曲线 A 和曲面 B 的维数分别为 $d_A=1, d_B=2$，而三维空间的维数 $d=3$，由公式(9.15)得 $d_{A\cap B}=1+2-3=0$，即三维空间的一条曲线和一个曲面一般相交于一个点.

现在我们应用(9.15)式到同样的对象(吸引子)$d_A=d_B$，同时 $d_{A\cap B}=-1$，即两个集合不相交，得到

$$d=2d_A+1. \tag{9.16}$$

(9.15)式说明，嵌入空间的维数 d 一般至少是混沌吸引子维数 d_A 的两倍. 例如三维空间的极限环吸引子，三维相空间的轨迹是不相交的闭合曲线 M，闭合曲

线是 $d_A=1$ 维. 如果用二维 $D=2$ 来构造,结果会怎么样呢?

图 9.6 显示,我们用它在平面上的投影来重构,出现的情况或是不相交或是相交. 因此二维空间中可以是一对一的,也可以是相交的. 由于交点处二维向量场有两个不同方向,因而其交点处就相应于原来相空间的不同状态,这样做就不合适,所以重构的维数要满足 $d>2d_A=2\cdot 1=2$. 这就意味着重构二维相空间并不能保证一个确定性的描述,至少要重构三维相空间.

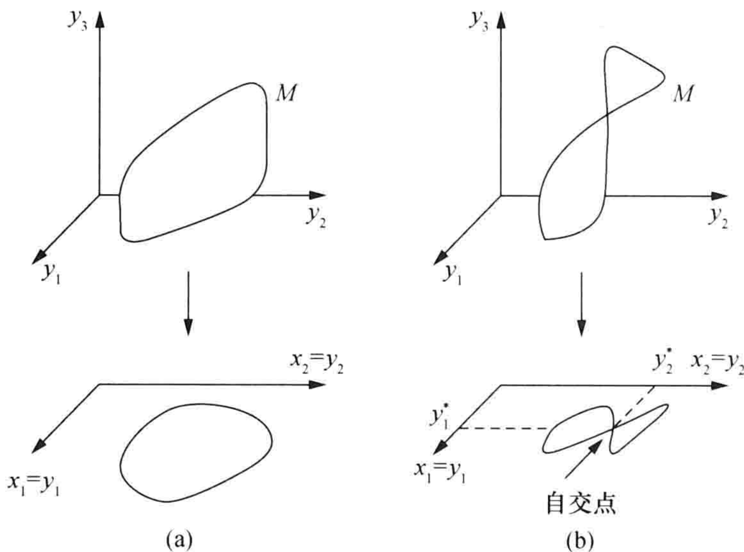


图 9.6　三维空间中一个不相交的闭合曲线在二维的投影

§9.4　混沌和噪声

传统的统计方法把随机看成是外部噪声,而从混沌观点看,随机可能来源于非线性动力系统内部,是该系统本身固有的. 如何区别混沌和噪声呢? 若是混沌,那么可以从时间序列中重构出动力系统的形式来,而噪声则不能. 图 9.7 是 3 个随机时间序列 $z_0,z_1,z_2,\cdots$.

我们已经知道,如果时间序列的每个数之间存在确定性的关系,则 z_{k+1} 将依赖于它前面时刻的数 $z_k,z_{k-1},\cdots$. 最简单的情况是 z_{k+1} 只依赖于 z_k,即

$$z_{k+1}=f(z_k). \tag{9.17}$$

我们以 z_k 为横坐标,以 z_{k+1} 为纵坐标重构二维空间,这三个时间序列得到的结果如图 9.8 所示. 从图 9.8 看出,时间序列(a)明显地来自于逻辑斯蒂映射(7.103)式,并带有参数 $\mu=4$. 序列(b)则没有明显的结构,它显然是一种噪声. 序列(c)不像序列(b)的点分布在二维(z_k,z_{k+1})平面上,而是有明显的结构,它也是一种混沌.

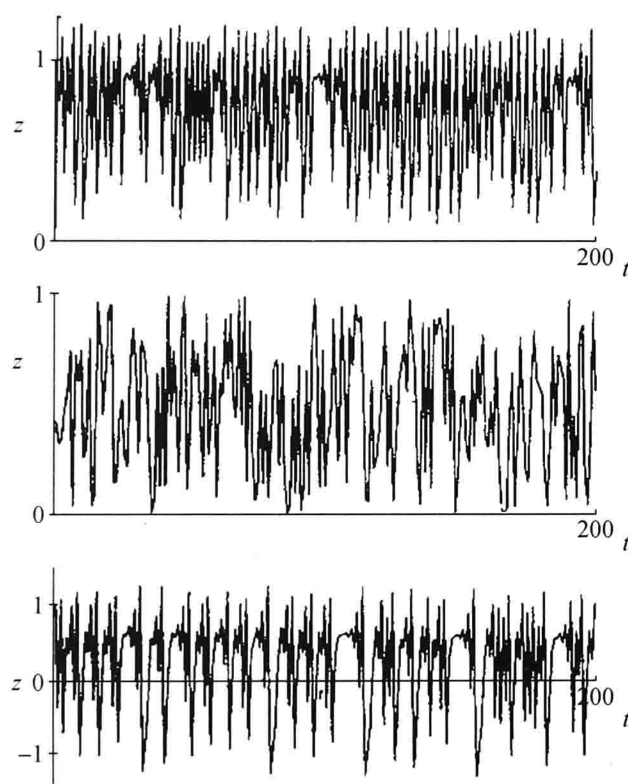


图 9.7 三种随机时间序列

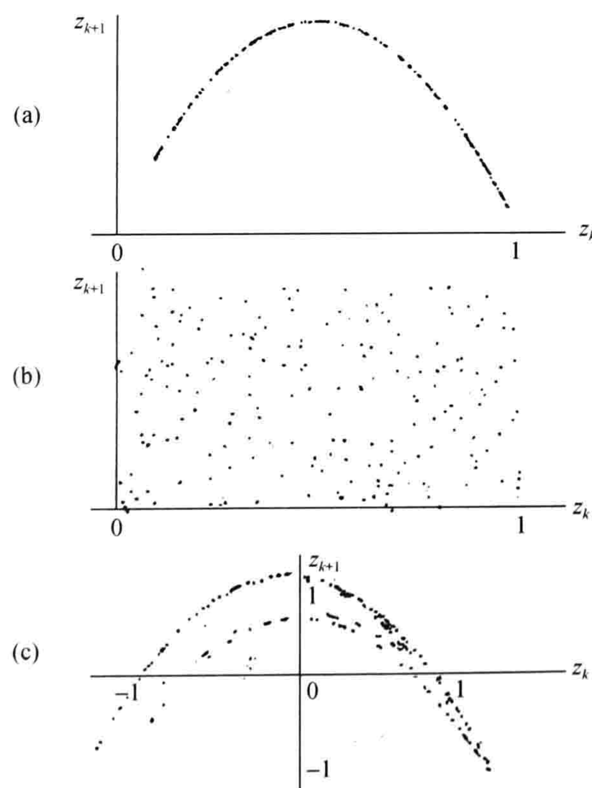


图 9.8 三个不同时间序列重构的二维空间图像

§9.5 延迟时间和时间序列长度

重构相空间的目的是使一个时间序列在一个合适的空间坐标系中能显示出混沌吸引子的结构,例如,三维自治动力系统(称为罗斯勒(Rossler)系统)

$$\begin{cases}\dot{x}=-(y+z),\\ \dot{y}=x+0.2y,\\ \dot{z}=0.2+xz-cz\end{cases}\tag{9.18}$$

当参数 $c=5.9$ 时就会出现混沌.

若用状态变量中的一个,如变量 z,去构造一个三维相空间

$$\begin{aligned}&(z(0),z(T),z(2T)),\\&(z(\tau),z(\tau+T),z(\tau+2T)),\\&(z(2\tau),z(2\tau+T),z(2\tau+2T)),\end{aligned}\tag{9.19}$$

其中 T 是 τ 的倍数,称为时间延迟,那么 T 应该选择多大才合适?显然,既然是三维坐标的相空间,那么(9.19)式中的每一个空间点的三个分量应该是相互独立的.如果 T 选择太小,则有 $z(T)\approx z(0)$,三个分量就几乎相等,这将导致重构的吸引子非常接近直线,见图9.9(c).但是若 T 选择太大,则三个分量之间的相关比较小,吸引子的轨道围绕相空间游荡,就很难看出吸引子的结构,见图9.9(b).只有适中的 T 值才能重构出罗斯勒吸引子的三维结构,见图9.9(a).至于如何从时间序列来估计吸引子的维数,则因为在相空间中有很多点是空的,用(2.8)式的方法去"数盒子"不是很有效.现在常用另外一种计算"相关维"的方法.若已经将时间序列嵌入到相空间中得到 N 个点,我们随便取定一个数 r,

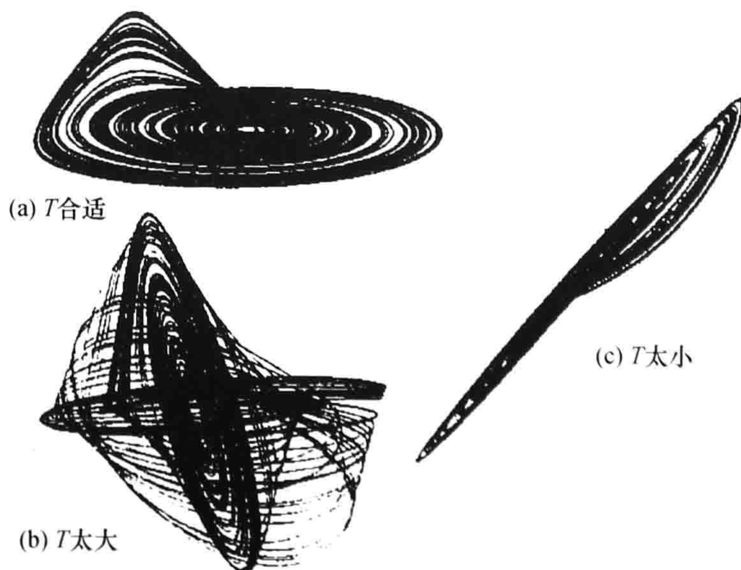


图9.9 选择不同 T 值时的重构吸引子

检查 N 个点中有多少“点对”(x,y)之间的距离小于 r(即在以 r 为半径的“球”内),并把距离小于 r 的“点对”在所有“点对”(共有 N^2 个“点对”)中所占的比例计算出来,即

$$C(r)=\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\theta(r-\|x_i-x_j\|),\tag{9.20}$$

其中 θ 是阶跃函数,它的定义为

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}\tag{9.21}$$

如果 r 太大,当然一切“点对”的距离都不会超过它,因而 $C(r)=1,\ln C(r)=0$. 函数 $C(r)$描述了随 r 增加时小于 r 的“点对”数是如何增长的.

显然,太大的 r 反映不了系统内部的性质. 适当地缩小 r,可能在某一个 r 的区间内有

$$C(r)=r^D,\tag{9.22}$$

这里的 D 就是重构相空间的吸引子的维数.

例如,均匀分布在一条线上的重构资料点,$C(r)$与 r 的一次方成正比,即 $D=1$,见图 9.10(a). 均匀分布在一个面上的重构资料点,则 $C(r)$应与 r 的二次方成正比,故 $D=2$,见图 9.10(b). D 值描述了重构相空间吸引子的结构.

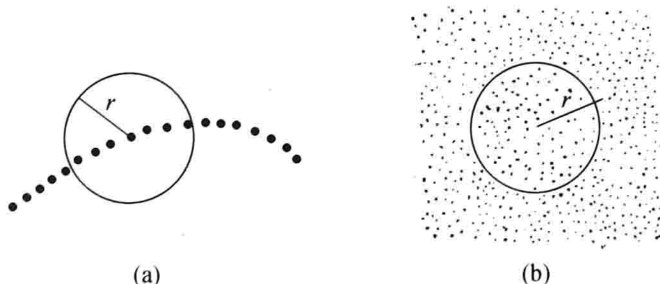


图 9.10 维数计算的说明

若以嵌入维数 d 为横坐标,吸引子的维数 D 为纵坐标,改变 d 求到的 D 不再改变时的 d 就可以作为嵌入的重构相空间的维数,见图 9.11. 图中实直线代表白噪声.

问题是时间序列的长度 N 多大时才能使嵌入相空间的维数 n 较为合理. 例如 $n=3$,若时间序列的点 N 只有 10^3,这就意味着每边只有 10 个点左右,这就显得少了. 若 $n=4$,则 $N=10^3$,就显得太少了,也就是说用 1000 个点嵌入到 $n=4$ 的相空间去描述吸引子的结构就显得不合理了. 现在常用经验公式

$$N_{\min}\approx 10^{2+0.1n}\tag{9.23}$$

求时间序列的最小长度,例如 $n=4$,则 $N_{\min}\approx 10^{3.6}\approx 4000$ 个点.

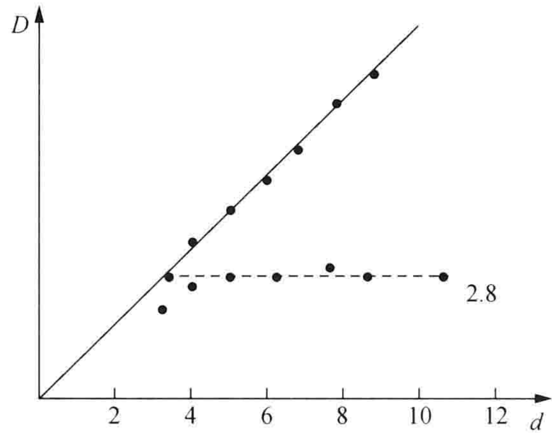


图 9.11 吸引子维数 D 随嵌入维数 d 的变化

为了说明重构相空间的预测，我们给出一个简单的例子，考虑 18 个点的时间序列 $s(t)$：0.4100000，0.9676000，0.1254000，0.4387000，0.9849000，0.0592100，0.222800，0.6927100，0.8514300，0.5059000，0.9998000，0.0005682，0.0022710，0.0090660，0.0359300，0.1385000，0.4775000，我们将其重构到二维相空间. 取 $T=1$，如图 9.12，图中点 1 的坐标是(0.4100000，0.9676000)，点 2 的坐标为(0.9676000，0.1254000)，以此类推. 现在我们做预测，问第 19 个点的值 $s(19)$ 是多少. 因为图中 17 号点的坐标为($s(17)$，$s(18)$)，一种最简单的预测方法是找距离 17 号点最近的点，例如图中第 10 点，它的轨道演化应该到第 11 点，那么我们认为第 17 点的轨道演化应该到 18 点，它应该离第 11 点最近，而第 11 点的坐标为(0.9998000，0.0005682)，因此我们预测 $s(19)=0.0005682$.

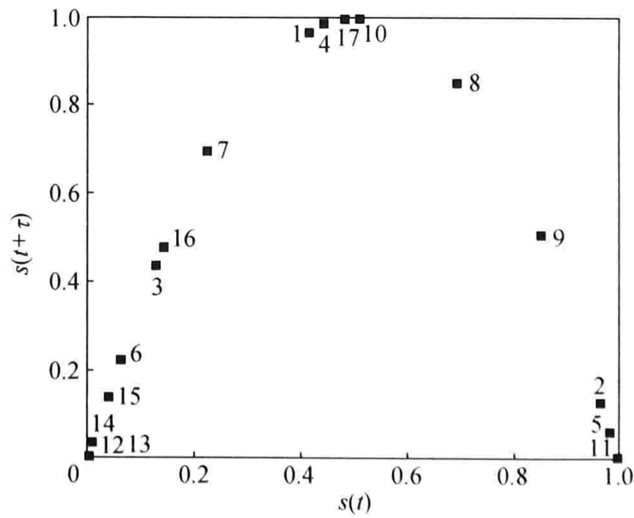


图 9.12 二维重构相空间

实际上，图 9.12 就是逻辑斯蒂映射，$s(19)$的真值是 $s(19)=0.0005800$，与上面预测的误差是很小的.

我们可以试着用 18 个点的通常的时间序列预测而不用相空间重构得到 $s(19)$并做比较.

§9.6 李雅普诺夫特征指数和科尔莫戈罗夫熵

混沌的发现给我们最大的启示是确定性的动力系统可以出现随机(非周期)的结果. 表 9.1 列出了耗散动力系统四种吸引子的特征.

混沌吸引子与其他三种吸引子最大不同之处在于，初始条件 x_0 若稍稍改变 δx_0，那么最后的结果仍是混沌吸引子，但每个时刻 t 的 x_t值可以有很大差别.

为了定量表征这一特征，我们考察(9.1)式中 x_{n-1}若有 δx_{n-1}的改变，x_n 会有多大差别. 由(9.1)式，得到

$$\begin{aligned}\delta x_n &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_{n-1}} \delta x_{n-1} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_{n-1}} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_{n-2}} \delta x_{n-2} \\ &= \cdots = \Big(\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\Big)\delta x_0 = \mathrm{e}^{LEn}\,\delta x_0.\end{aligned} \tag{9.24}$$

由(9.24)式，得到

$$LE = \frac{1}{n}\ln\Big|\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\Big| = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)| = \frac{1}{n}\ln\frac{\delta x_n}{\delta x_0}. \tag{9.25}$$

LE 就称为李雅普诺夫特征指数. 从(9.25)式可以知道经过 n 次迭代以后，平均起来讲 δx_n 和 δx_0 的比值有多大差别.

对于表 9.1 的其他三种吸引子，它们最后都要被吸引到点、周期或拟周期吸引子上，因而(9.25)式中$|f'(x_i)|<1$，故 $LE\leqslant 0$. 四种吸引子中只有混沌吸引子要伸长、折叠. 这里的伸长表示$|f'(x_i)|>1$，因而 $LE>0$，即只有混沌吸引子李雅普诺夫特征指数为正.

对于(3.81)式的帐篷映射，

$$x_{n+1}=f(x_n)=\begin{cases}2x_n, & 0\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2ex] 2-2x_n, & \dfrac{1}{2}<x_n\leqslant 1,\end{cases} \tag{9.26}$$

按(9.25)式，可求出

$$LE=\frac{1}{n}\ln 2^n=\ln 2>0.$$

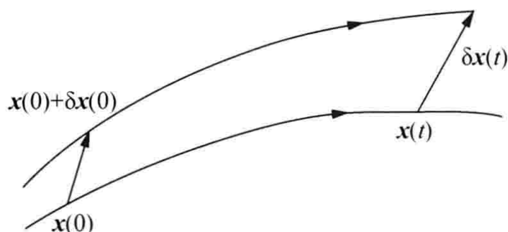


图 9.13 轨道的指数分离

对于 n 维连续动力系统(9.8)式，相空间有一轨道 $\boldsymbol{x}(t)$，见图 9.13. 若初始轨道有一点差别 $\delta\boldsymbol{x}(0)$，那么 t 时刻以后的差别就是 $\delta\boldsymbol{x}(t)$，有

$$\|\delta\boldsymbol{x}(t)\| = e^{(LE)t}\|\delta\boldsymbol{x}(0)\|, \tag{9.27}$$

即

$$LE = \frac{1}{t}\ln\frac{\|\delta\boldsymbol{x}(t)\|}{\|\delta\boldsymbol{x}(0)\|}. \tag{9.28}$$

但是向量 $\delta\boldsymbol{x}(t)$ 有 n 个分量，那么对每个分量都可以求出一个 LE，按大小次序排列有

$$LE_1 \geqslant LE_2 \geqslant \cdots \geqslant LE_n. \tag{9.29}$$

对三维相空间，有

$$LE_1 + LE_2 + LE_3 = \frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} < 0, \tag{9.30}$$

其中 $V(t)$ 是相空间体积. 图 9.14 是三维相空间中四种吸引子的李雅普诺夫特征指数谱. 从图上看出，只有混沌吸引子有正的李雅普诺夫特征指数，且三个指数之和为负. 通常将所有正的李雅普诺夫特征指数之和

$$K = \sum_i LE_i \quad (LE_i > 0) \tag{9.31}$$

称为科尔莫戈罗夫熵，简称 K 熵. 对于混沌吸引子 $K>0$.

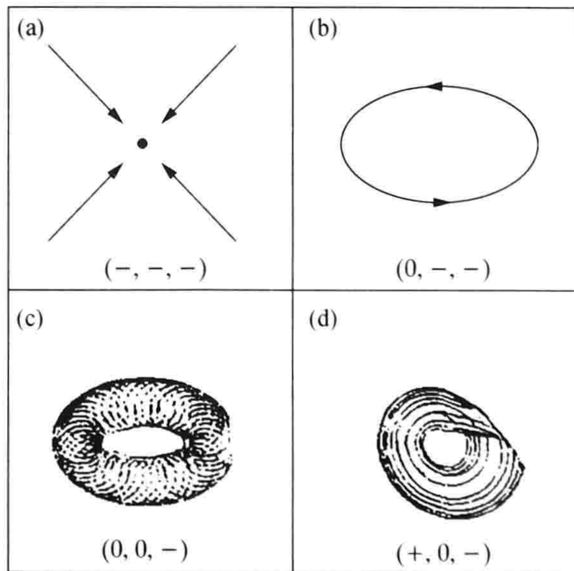


图 9.14 三维相空间中四种吸引子的李雅普诺夫特征指数谱

§9.7 经验模态分解

一个时间序列由于含有各种尺度(或频率),为了更有效地分析它,我们介绍最近 20 年发展起来的经验模态分解法,长记忆时间序列和去趋势涨落分析方法.

在第四章我们介绍了小波变换,由于它的局部性,我们可以对一个分形时间序列找出它的突变时间. 小波变换中有尺度这个参数. 无论是傅里叶变换还是小波变换,它们的尺度或尺度的倒数(频率或波数)都被认为是常数. 实际上时间序列的统计特征无论是频率还是振幅都是随时间变化的,这是非平稳时间序列的特征. 另外非线性序列也不能用简单的正余弦函数或小波函数叠加而成.

例如达芬方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+x+\varepsilon x^3=A\cos\omega t, \tag{9.32}$$

若无非线性项($\varepsilon=0$)和强迫项 $A=0$,那么振荡的频率是常数,但是有了非线性项后,震荡的频率是随时间变化的,因而非线性时间序列的振幅或波形的变化受到频率的调制. 黄锷(N. E. Huang)于 1998 年提出了一种分析非线性非平稳时间序列的新方法——经验模态分解(empirical mode decomposition). 这种方法的基本思想是一个非线性非平稳时间序列是由随时间变化的不同尺度的波构成的,我们要设法把这些固有的内在的本征模态函数(intrinsic mode function,简称 IMF)的分量 $C_1, C_2, \cdots$ 从高频到低频逐级分离(或过滤)出来. 注意这些分量既不是正(余)弦函数,又不是小波函数,而是从序列中找到的,因而是客观的. 最后时间序列中剩下来的分量就是"趋势项",它可以像小波变换那样,判断时间序列的变化趋势. 同时对每一个 IMF 分量 C_i 做希尔伯特(Hilbert)变换,能够求出 C_i 的频率 $\omega_i(t)$ 和振幅 $a_i(t)$ 随时间的变化. 例如图 9.15 的一个时间序列 $s(t)$. 我们将序列的最大值平滑相连而得到一条上包络线,将序列的最小值平滑相连而得到一条下包络线,然后求出上下两条包络的平均包络线 m,见图 9.16. 将信号 s 减去平均包络线 m,就得到一条新曲线 h_1,见图 9.17. 我们对 h_1 继续这种过滤过程得到图 9.18,最后经过 12 次过滤得到第一个 IMF 模 C_1,见图 9.19. 过滤直到上下包络线对于零线是局部对称的,即是局部极大值和局部极小值对称的波形为止. 图 9.19 就是第一个本征模态函数 C_1. C_1 既不是正、余弦函数,也不是小波函数. 这样每一步得到一致内在的振荡模 $C_i(i=1,2,\cdots)$,随着 i 的增加,C_i 中的小尺度(或短周期)的成分不断被消除. 若设

$$\begin{cases} r_1 = s(t) - C_1, \\ r_2 = r_1 - C_2, \\ \cdots\cdots \\ r_n = r_{n-1} - C_n \end{cases} \tag{9.33}$$

是每次剔除 C_i 的剩余部分,那么原信号

$$\begin{aligned} s(t) &= r_1 + C_1 \\ &= (r_2 + C_2) + C_1 \\ &= \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i + r_n, \end{aligned} \tag{9.34}$$

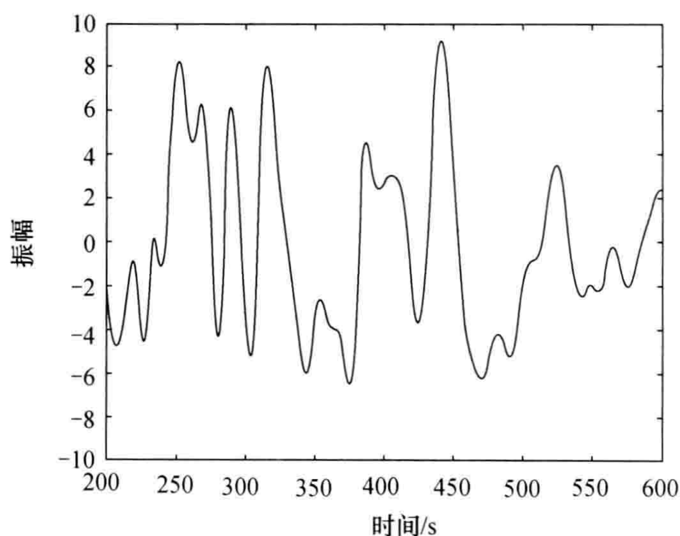


图 9.15 一个时间序列

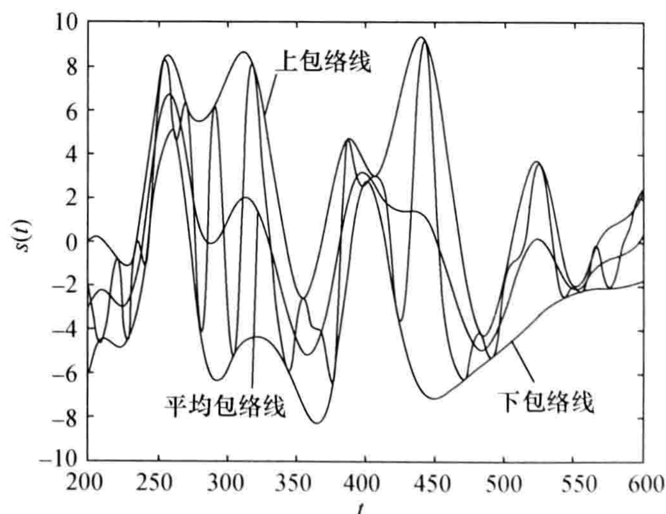


图 9.16 时间序列的包络线

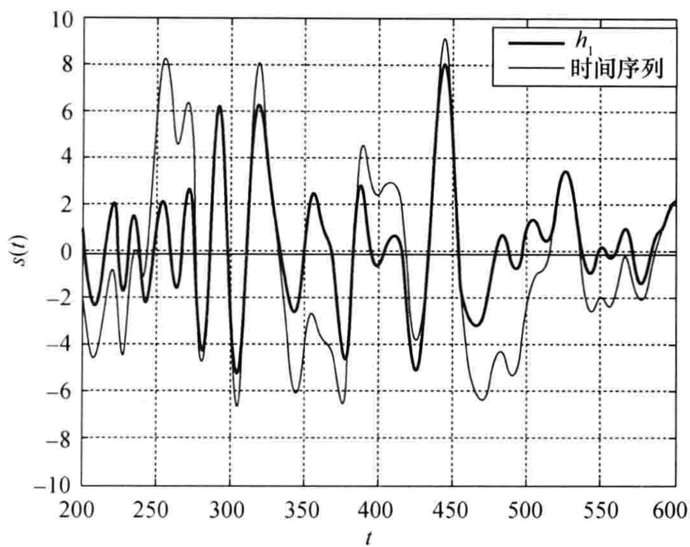
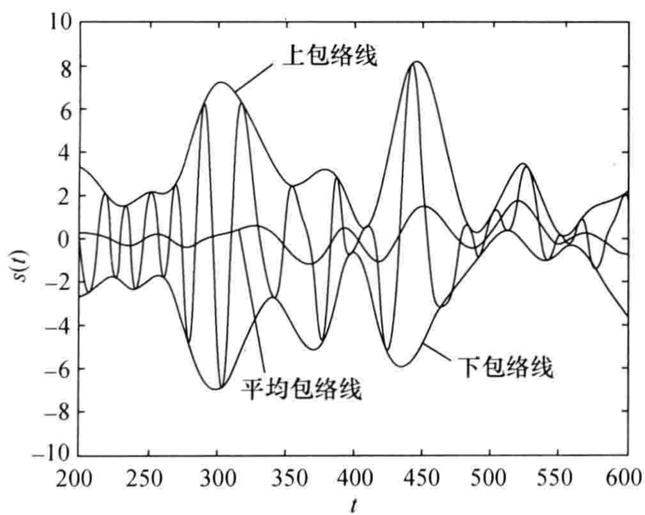


图 9.17　新的曲线 h_1



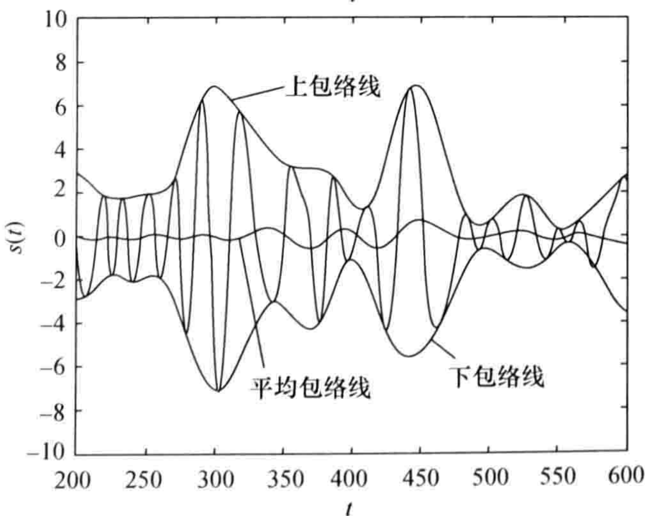


图 9.18　h_1 曲线的继续过滤

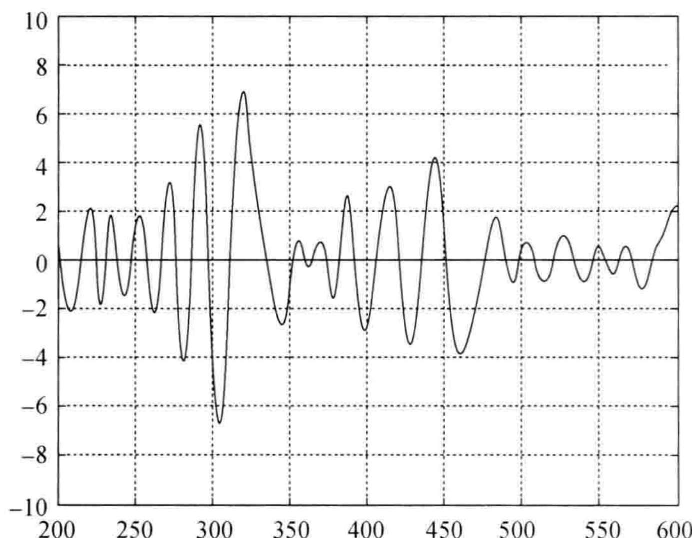


图 9.19 第一个内本征模态函数

其中 n 步以后的剩余 r_n 就代表该物理系统在所研究的时间尺度范围内的趋势，它集中反映了序列的非平稳性. 从(9.34)式看出，信号 $s(t)$ 就是 n 个由序列本身得到的建筑块 C_i 叠加而成的.

图 9.20(a)～(g)是中国年平均气温 130 年序列的经验模态分解的结果. 其中 C_1，C_2，C_3 分别表示 3～4 年，8～10 年和年代际的振荡，C_6 则是趋势项，反映近 130 年全球及中国气温升高的趋势.

经验模态分解的另一方面要对 C_i 做希尔伯特变换.

一个实信号 $s(t)$ 的希尔伯特变换定义为

$$Hs(t) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t)}{t-\tau} \mathrm{d}\tau , \tag{9.35}$$

其中 PV 表示主值. $s(t)$ 和 $Hs(t)$ 构成一个解析信号

$$z(t) = s(t) + \mathrm{i}Hs(t) = a(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} , \tag{9.36}$$

其中

$$a(t) = \sqrt{s^2(t) + [Hs(t)]^2} , \tag{9.37}$$

$$\theta(t) = \arctan \frac{Hs(t)}{s(t)} \tag{9.38}$$

分别表示振幅和幅角，而幅角对时间 t 的导数

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{9.39}$$

即是非平稳序列中 C_i 的瞬时频率.

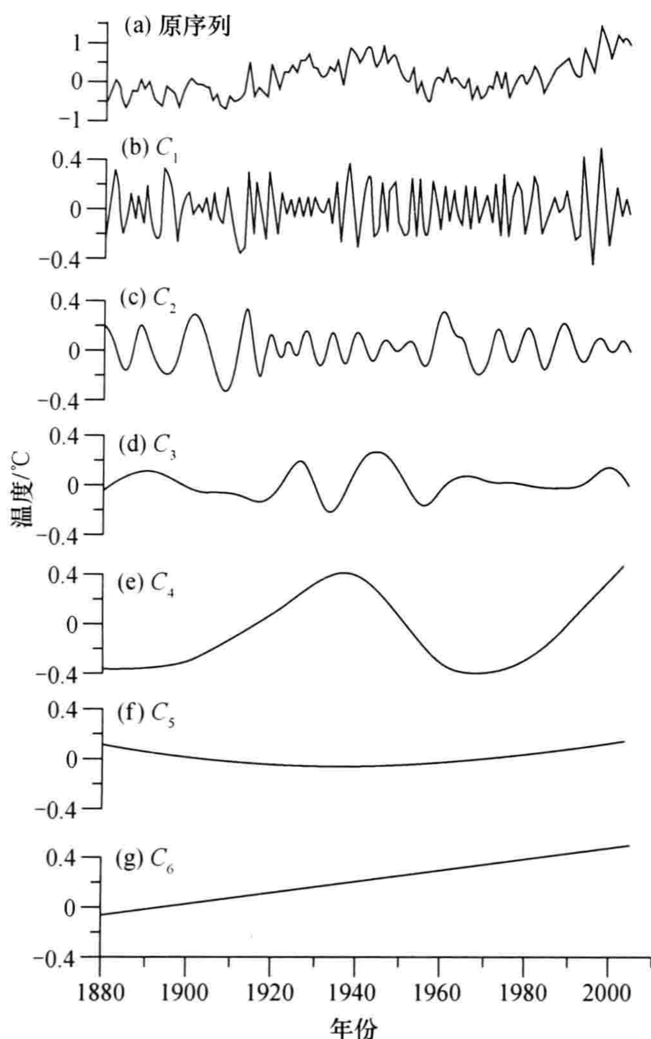


图 9.20 我国年气温距平序列及五个 IMF 分量和一个趋势项

我们举一个振幅调制信号的例子. 信号

$$s(t)=\left[1+0.5\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos t \tag{9.40}$$

表现为 $\cos t$ 波前的振幅随时间而变化. 图 9.21 显示信号 $s(t)$ 及上下包络. 将信号 $s(t)$ 和上下包络的平均值相减便得到一个高频信号(实线)以及它的趋势(虚线), 见图 9.22. 从图 9.22 看出, 信号 $s(t)$ 由于振幅随时间变化, 引起了瞬时频率的变化, 表现在图 9.22 上高频信号振荡是一次宽一次窄的周期性变化, 频率趋势也说明了这种周期性. 按(9.39)式算出瞬时频率可以看出信号的周期变化.

经验模态分解方法是一种分析非线性非平稳时间序列演变趋势的新方法.

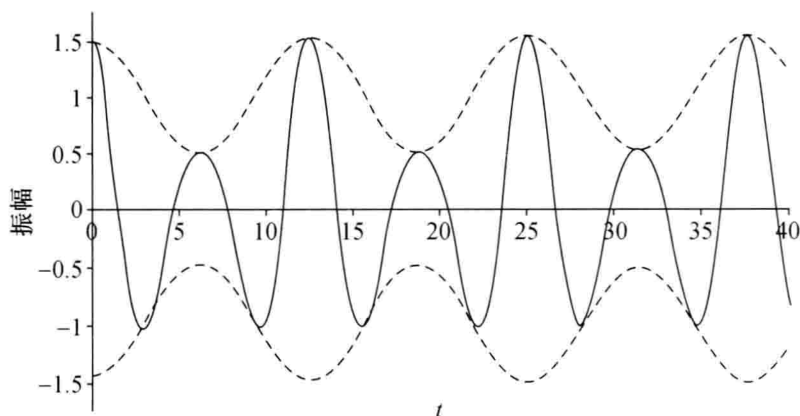


图 9.21　振幅调制信号

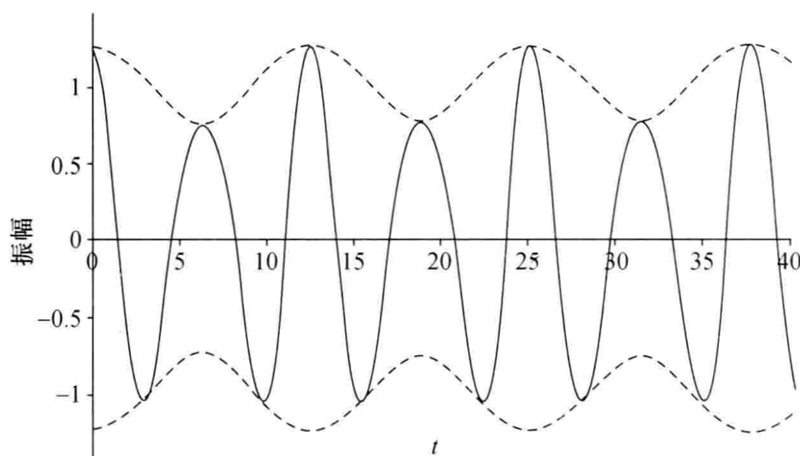


图 9.22　从图 9.21 信号中分出高频分量

§9.8　长记忆性的时间序列

我们在(5.33)式论述了白噪声 ε 和布朗噪声 x 之间的关系，它们满足的随机微分方程(称为朗之万方程)是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varepsilon, \tag{9.41}$$

即布朗噪声微商一次就是白噪声. 反过来，白噪声积分一次就是布朗噪声，详见第五章.

白噪声显然是不相关的，而布朗噪声也是短程相关的，但是若将微商次数由 1 改变成 $0<\alpha<1$，那么(9.41)式就可写成

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\varepsilon. \tag{9.42}$$

此时的噪声信号 x 就是长程相关了，因为相当于将白噪声积分 α 次，把高频无

记忆性的信号去除了.(9.42)式这种过程就是长记忆过程.

怎么在时间序列上去表现长记忆过程呢？为此定义向后的漂移算子 B 满足

$$Bx_t = x_{t-1}, \tag{9.43}$$

那么 x_t 的向后差分

$$x_t - x_{t-1} = x_t - Bx_t = (1-B)x_t, \tag{9.44}$$

因此过程(9.42)的差分形式就是

$$(1-B)^{\alpha} x_t = \varepsilon_t. \tag{9.45}$$

$(1-B)^{\alpha}$ 在 α 是整数时可以用二项式展开：

$$(1-B)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} (-B)^k. \tag{9.46}$$

当 $0<\alpha<1$ 且为分数时，我们可以用 Γ 函数来表示 $\binom{\alpha}{k}$，且(9.46)式中求和号的上限变为 ∞，即

$$(1-B)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} (-B)^k. \tag{9.47}$$

反过来，由(9.45)式，x_t 可以表示为

$$x_t = (1-B)^{-\alpha}\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \varepsilon_{t-k}, \tag{9.48}$$

此时的 x_t 和之前 τ 时刻的序列 $x_{t-\tau}$ 的自相关函数为

$$R(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (x_t - \langle x \rangle)(x_{t+\tau} - \langle x \rangle), \tag{9.49}$$

其中 n 是时间序列的长度，$\langle x \rangle$ 是其平均值.

利用(9.46)式，可求得

$$R(\tau) = \frac{\Gamma(\tau+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\tau-\alpha+1)\Gamma(\alpha)}. \tag{9.50}$$

利用下列近似公式(x 很大时)

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}, \tag{9.51}$$

则(9.50)式可写为

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\tau+\alpha)}{(\tau-\alpha)\Gamma(\tau-\alpha)} \\ &\approx \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\tau+\alpha)^{\left(\tau+\alpha-\frac{1}{2}\right)} e^{-(\tau+\alpha)}}{(\tau-\alpha)(\tau-\alpha)^{\left(\tau-\alpha-\frac{1}{2}\right)} e^{-(\tau-\alpha)}} \\ &\approx \frac{\tau^{\left(\tau+\alpha-\frac{1}{2}\right)-\left(\tau-\alpha-\frac{1}{2}\right)}}{\tau} \\ &= \frac{\tau^{2\alpha}}{\tau} = \tau^{2\alpha-1}. \end{aligned} \tag{9.52}$$

所以自相关函数是一个幂函数,且标度指数为$(2\alpha-1)$.

由于自相关函数$R(\tau)$和功率谱$S(f)$互为傅里叶变换,且$fS(f)$和$R(\tau)$量纲相同,可得到

$$\tau^{2\alpha-1}=f\cdot f^{-\beta}=\tau^{\beta-1}.$$

功率谱指数β为

$$\beta=2\alpha. \tag{9.53}$$

下面举两个例子. 第一个例子,考虑

$$y_t=(1-B)^{0.45}x_t, \tag{9.54}$$

有

$$\begin{aligned} y_t &= x_t - 0.450x_{t-1} - 0.12375x_{t-2} \\ &\quad - 0.0639375x_{t-3} - \cdots - 0.001287312x_{t-40}. \end{aligned} \tag{9.55}$$

第二个例子,考虑

$$x_t=(1-B)^{-0.45}\varepsilon_t, \tag{9.56}$$

有

$$\begin{aligned} x_t &= \varepsilon_t + 0.45\varepsilon_{t-1} + 0.32625\varepsilon_{t-2} \\ &\quad + 0.2664275\varepsilon_{t-3} + \cdots + 0.0657056\varepsilon_{t-40}. \end{aligned} \tag{9.57}$$

图 9.23 是$\alpha=0.40$,时间序列长度为 10000 时所得到的时间序列及相关函数.

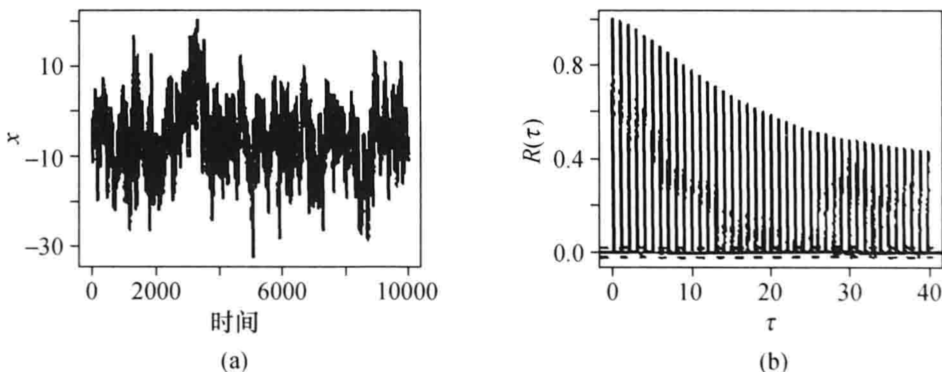


图 9.23　长记忆时间序列和相关函数

(a)长记忆时间序列;(b)相关函数. 引自 W. Palma(2007)

§9.9　去趋势涨落分析

在长记忆时间序列$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$中我们如何估算参数α(即微商次数)和自相关函数呢? 去趋势涨落分析(detrended fluctuation analysis,简称 DFA)方法的原理是构造一个原序列距平的累积和,这就相当于原序列的积分,也是去除高频信号涨落. 这种方法的第一步是求$x_i(i=1,2,\cdots,N)$距平的累积和

$$y(n) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \quad (n = 1,2,\cdots,N), \tag{9.58}$$

其中 $\hat{x}=x_i-\langle x\rangle$是距平．这里 $y_1,y_2,\cdots,y_N$可以看做是带有增量 x_i的随机游动．

我们将序列 $y_1,y_2,\cdots,y_N$分成 k 个不重叠的组，每个组含有$\frac{N}{k}$个 y 的观测值．在每个组，我们可以用线性回归方法求估计的方差 ${\sigma_k}^2$．具体做法用图 9.24 来说明．图 9.24 的左上图是求和序列以及它的最小二乘法拟合，左中图是求和序列分成四组，左下图是分成 16 组．图 9.24 的中图是去除趋势后的序列．图 9.24 的右图是标准差 ${\sigma_k}^2$．

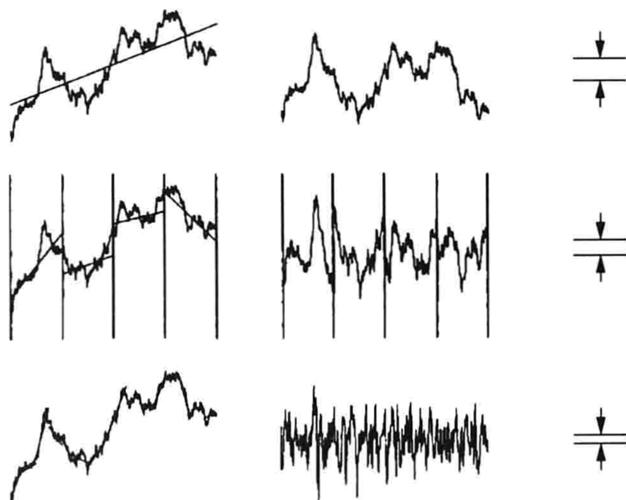


图 9.24 求和序列和它的最小二乘法拟合

现在用 $F^2(k)$表示这些方差的平均：

$$F^2(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}{\sigma_i}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\langle \Delta y(k)^2\rangle. \tag{9.59}$$

设原序列的功率谱为

$$S(f)\propto f^{-\beta}, \tag{9.60}$$

那么按(5.54)式，自相关函数为

$$R(\tau)\propto \tau^{-\gamma}. \tag{9.61}$$

从(5.53)式知

$$F^2(k)\propto k^{2-\gamma}. \tag{9.62}$$

因为求和序列(9.59)的功率谱指数增加 2(求和相当于积分一次，详见第五章)，故 $F^2(k)$的量纲是

$$S(f)\cdot f=f^{-(\beta+2)}\cdot f=f^{-\beta-1}=k^{1+\beta}, \tag{9.63}$$

即

$$2-\gamma=1+\beta$$

或

$$\beta = 1 - \gamma. \tag{9.64}$$

按(9.52)式，积分 α 次的序列(9.48)式 x 的自相关函数的标度指数为

$$\gamma = 1 - 2\alpha, \tag{9.65}$$

故方差(9.62)式可以写为

$$F^2(k) = ck^{2-(1-2\alpha)} = ck^{1+2\alpha} \tag{9.66}$$

或

$$F(k) = ck^{\alpha+\frac{1}{2}}. \tag{9.67}$$

对(9.67)两边取对数，有

$$\ln F(k) = \ln c + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ln k, \tag{9.68}$$

那么利用最小二乘法，在双对数$((\ln k, \ln F(k))$坐标上拟合出的直线斜率就是$\alpha + \frac{1}{2}$.

图 9.25 绘制的是 $\ln F(k)$对 $\ln k$ 的拟合直线图，其中 $k=1,2,\cdots,125$. 从图上看出，其斜率约为 0.9，因而 $\alpha \approx 0.4$.

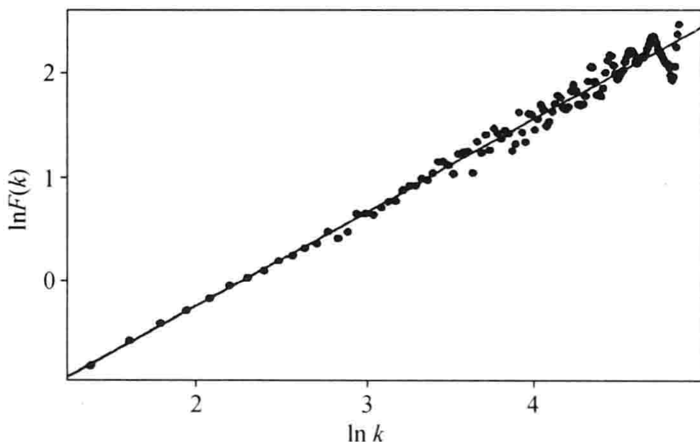


图 9.25　lnF(k)对 lnk 的拟合

DFA 方法也是分析分形、时间序列的有效方法.

小　　结

一个时间序列并不是相空间轨道，因此做预测时要将时间序列重构成相空间. 利用白噪声的 α 阶(分数阶)积分可以得到长记忆过程的记忆序列，其中 α 可以由去趋势涨落分析确定. 对非平稳时间序列，经验模态分解可以判断变化的趋势.

第十章 自组织、自相似和结构

相变和临界现象，在临界点处各种尺度都有，成为一种无特征尺度现象. 同时相变也是一个自组织现象. 在原子、分子层次上，原来磁化方向无序的对称状态到达临界点后，好像有指挥般地变成了全部整齐地排成同一指向的对称破缺状态，宏观层次上具有了磁性结构. 这种纯粹是由内部单元的相互作用而产生的结构称为自组织.

还有一类临界现象，系统在外界缓慢驱动下形成一个定常临界状态. 很多有精细功能的结构(如生命)都是由像原子那样的建筑块相互作用而构成的，但是目前的物理定律中并不含有这种组织的信息. 这类现象通常是外界缓慢地供给能量，使系统各单元之间产生精致的平衡，系统经常处在临界状态. 例如地球系统外在的能源是太阳辐射，其供给地球的能量约等于流向地球外的长波辐射能量，这使得地球系统的温度近似处于常数，处在非平衡定常状态. 此时大的涨落(或事件)和小涨落(或事件)随时都在发生，是一种无特征尺度现象. 这种和外界有能量交换而产生的临界现象，称为自组织临界现象(SOC).

自然界的自组织现象有许多丰富美丽的结构，它们共同的特点都是自组织和自相似. 这些系统由大量的单元(如分子、原子、人脑的神经元等)组成，而基本单元的相互作用涌现出各种层次结构.

本章要介绍和自组织有关的概念和自组织、自相似常见斑图以及机理. 为了解释自组织和自组织临界现象，我们先介绍动力系统的概念.

§10.1 动力系统

由于自组织临界现象能有效地适应外界参数的变化，使得定常的临界状态能和这些参数变化无关(即不改变状态). 为了描述状态的变化，我们应区别几种动力系统：保守系统、耗散系统和适应系统. “适应系统”一词在动力系统理论中很少被提到.

所谓动力系统就是随时间变化的系统，通常用微分方程或迭代映射来表示，见§9.1. 前者称为连续动力系统，后者称为离散动力系统.

由于经典物理学是建立在牛顿力学基础上的. 若用 x 表示质点的位置，那么 x 对时间 t 的一阶微商 $\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 就表示质点的速度，而速度对时间的一阶微商，

或位置 x 对时间 t 的二阶微商 $\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ 就表示质点的加速度. 单位质量的质点的牛顿第二定律即可表示为一个动力系统：

$$\ddot{x}=F, \tag{10.1}$$

其中 F 是质点所受的力. 例如弦振荡或无阻尼的单摆方程就可以写成

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0, \tag{10.2}$$

其中 $\omega_0^2 x$ 为回复力. 若存在阻尼力 $\gamma\dot{x}$，那么阻尼振荡的方程则由(10.2)式改成

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0. \tag{10.3}$$

在(10.2)，(10.3)式中若令 $\dot{x}=y$，则可将它们化成一阶微分方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-\omega_0^2 x;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-\gamma y-\omega_0^2 x.\end{cases} \tag{10.4}$$

此时用位置 x 和速度 $y=\dot{x}$ 就可以描述系统的状态，因此 (x,y) 称为相（状态）平面. 若将(10.4)式推广到 n 维向空间，

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \quad\cdots\cdots\\ \dot{x}_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{cases} \tag{10.5}$$

就形成 n 维相空间 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的动力系统.

在(10.4)式中 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 可以看成平面 (x,y) 上的三维速度场 $\boldsymbol{v}(u,v,w)$ 的前两个分量，那么三维速度的速度散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}. \tag{10.6}$$

速度散度表示单位体积的体积 V 流量，用流出去的体积量减去流进来的体积量. 因此 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ 表示流出去的等于流进来的，它表示该动力系统是保守系统，见图 10.1(a)，而 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}<0$ 表示该动力系统是耗散系统，见图 10.1(b). 对于耗散系统，相空间体积收缩，它总要收缩到表 9.1 显示的四种吸引子上. 例如由(10.4)式的第一个方程组，可求得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial(-\omega_0^2 x)}{\partial y}=0, \tag{10.7}$$

因而是保守系统. 而对(10.4)式的第二个方程组，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial(-\gamma y-\omega_0^2 x)}{\partial y}=-\gamma<0, \tag{10.8}$$

因而是一个耗散系统. 另外还有一类系统，例如

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x[1-(x^2+y^2)],\\ \dot{y}=x+y[1-(x^2+y^2)]\ .\end{cases} \tag{10.9}$$

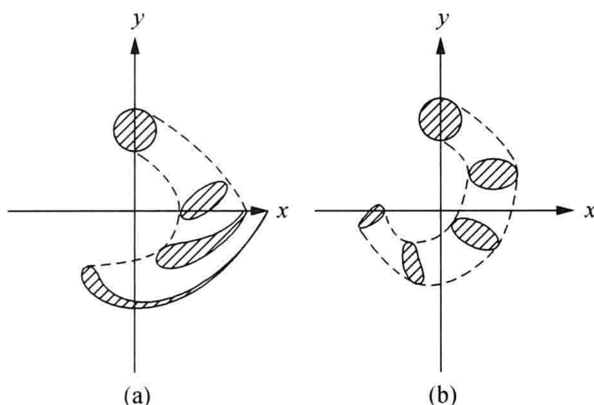


图 10.1　保守系统和耗散系统

(a)保守系统;(b)耗散系统

若用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 表示,则(10.9)式化成

$$\begin{cases}\dot{r}=\dfrac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}=r(1-r^2),\\ \dot{\theta}=\dfrac{x\dot{y}-\dot{x}y}{r^2}=1.\end{cases} \tag{10.10}$$

在极坐标(r,θ)中的速度场为 $v_r=\dot{r}, v_\theta=r\dot{\theta}$,所以速度散度为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}=\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}+\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta}=1-3r^2. \tag{10.11}$$

因此当 $3r^2>1$ 即 $r>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时,$\nabla\cdot\boldsymbol{v}<0$,系统是耗散的. 但是当 $r<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时,$\nabla\cdot\boldsymbol{v}>0$,相空间体积及不但不收缩反而膨胀. 对这种情况,系统或是耗散能量或是吸收能量,而使系统保持在(10.10)式右端为零的状态,所以有

$$r^2=1,$$

即

$$r=1. \tag{10.12}$$

$r=1$ 称为极限环. 这种既周期性吸收外界能量,又周期性耗散能量给外界环境的系统,叫"适应系统". 这种系统适应外界参数的变化,使系统维持一种稳定的状态,如§10.7 中将讲到的可激发的弛豫振荡状态. 一个复杂系统既不是完全的保守系统,也不是完全的耗散系统,只有通过对环境的不断适应,从而"学习","积累"经验,"增长知识",同时还必须"记忆"先前的状态,才能对系统的结构产生重要的影响.

分形系统也是一个自适应系统. 例如植物要吸收太阳光,同时要排出氧气,树枝树叶不断地增长,吸收的阳光越来越多,但吐出的氧气也越多,保持树木的分形结构不变.

应该注意到，在(10.5)式中令其右端为零，就要解一个非线性代数或超越方程组

$$f_1=0, f_2=0, \cdots, f_n=0, \tag{10.13}$$

而求到的状态称为定常状态，也称为不动点或奇点，有时也称为平衡态. 例如方程组(10.4)的定常状态是$(x,y)=(0,0)$，方程组(10.10)的定常状态是 $r=0$ 和 $r=1$.

§ 10.2 反应扩散系统中的斑图

斑马身上有斑纹，猎豹身上有斑点，动物身上为什么会有各种各样的斑图呢？这个问题虽然复杂，但是科学家们认为，在生物胚胎发育过程中，原来比较均匀的黑色素(一种黑色素细胞产生的有色分子)与其他反应物发生生物化学反应，同时在体内扩散，在一定条件下，会在空间自发地组织成像斑纹、斑点等类型的周期性非均匀的黑色素结构. 从分岔的观点看，这种均匀结构转变成非均匀结构的过程就是形态分岔，常称为图灵(Turing)分岔. 我们以布鲁塞尔模型(Brusselator)为例. 两种总反应物的浓度 u,v 随时间的变化满足下列反应扩散方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=f(u,v)+D_u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}=g(u,v)+D_v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\end{cases} \tag{10.14}$$

其中 $f(u,v)=\alpha+u^2v-(1+\beta)u, g(u,v)=\beta u-u^2v$ 代表非线性反应项，(10.14)两式右端第二项代表扩散项，D_u, D_v 分别为扩散系数. 与第九章讨论的不同之处在于，此处的状态变量 u,v 既随时间又随空间变化. 若令(10.14)式右端为零，则代表定常状态；若又设定$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 和$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$，这就表示均匀状态. 因而，定常且均匀状态满足的方程为

$$\begin{cases}f(u,v)=0,\\ g(u,v)=0.\end{cases} \tag{10.15}$$

对(10.14)式很容易得到定常均匀态

$$u^*=\alpha, v^*=\frac{\beta}{\alpha}. \tag{10.16}$$

为了讨论分岔，我们就要讨论定常均匀态(u^*,v^*)的稳定性. 设

$$u=u^*+\delta u\ ,\quad v=v^*+\delta v, \tag{10.17}$$

其中 δu 和 δv 为小扰动，将(10.17)式代入(10.14)式并做线性化近似，得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{u^*,v^*}\delta u+\frac{\partial f}{\partial v}\bigg|_{u^*,v^*}\delta v\right)+D_u\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} \\
&= [2\beta-(1+\beta)]\delta u+\alpha^2\delta v+D_u\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial(\delta v)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{u^*,v^*}\delta u+\frac{\partial g}{\partial v}\bigg|_{u^*,v^*}\delta v\right)+D_v\frac{\partial^2\delta v}{\partial x^2} \\
&= (\beta-2\beta)\delta u-\alpha^2\delta v+D_v\frac{\partial^2(\delta v)}{\partial x^2}.
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

设

$$
\begin{aligned}
\delta u &= (\delta u)_0 e^{\lambda t+ikx}, \\
\delta v &= (\delta v)_0 e^{\lambda t+ikx},
\end{aligned}
\tag{10.19}
$$

其中 λ 称为特征值,并将其代入(10.18)式,得

$$
\lambda^2+p\lambda+q=0,
\tag{10.20}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
p &= (\alpha^2+1)-\beta+(D_u+D_v)k^2, \\
q &= \alpha^2\beta-(\beta-1-k^2D_u)(\alpha^2+k^2D_v).
\end{aligned}
\tag{10.21}
$$

因此,若所有特征值的实部 $\mathrm{Re}\lambda<0$,则有 $\delta u\to 0$,$\delta v\to 0$,定常均匀态 (u^*,v^*) 是稳定的. 只要有一个 $\mathrm{Re}\lambda>0$,定常均匀态 (u^*,v^*) 就不稳定,会发生分岔. 我们讨论的不是分岔出时间振荡的状态(此时 λ 有虚部),而是讨论分岔出一个新的定常状态的情况,即 λ 为实根,且至少有一个实根为正. 从(10.20)式看出,这有两种可能:当 $q<0$ 时,λ 为一正一负,(u^*,v^*) 为鞍点;当 $p<0$,且 $p^2<4q$ $(q>0)$ 时,λ 为两正实根,(u^*,v^*) 为不稳定结点(见图 10.2),这里不同的只是 λ 和 k 有关.

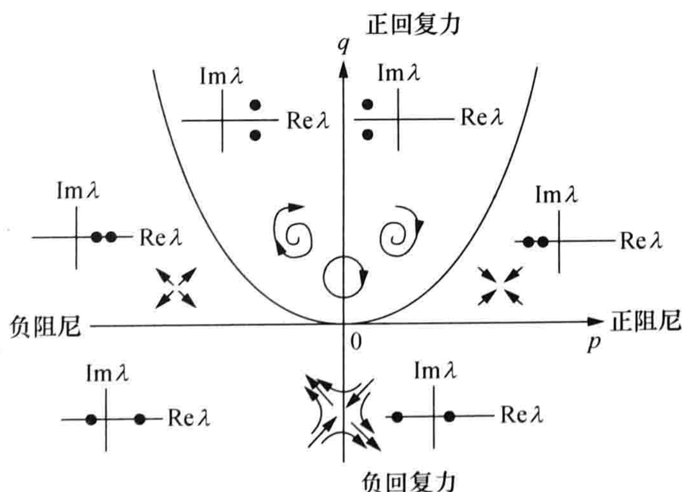


图 10.2　参数平面 (p,q) 上的 λ 分布

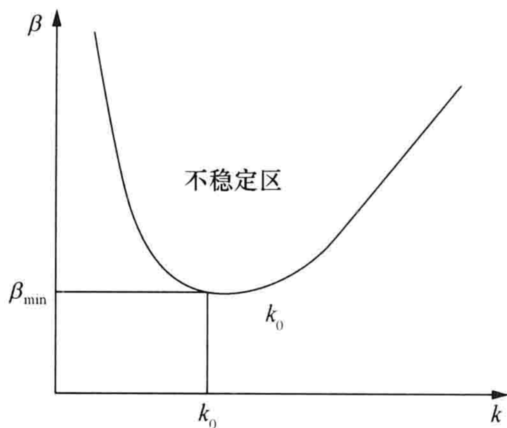


图 10.3　图灵不稳定的临界曲线

从(10.21)式看出,当 $\beta<1$ 时 $p>0$, $q>0$,此时定常均匀态(u^*,v^*)是稳定的.要发生稳定性变化(由稳定变成不稳定),必须由 $q>0$ 时 λ 为负实数,转变为$q<0$ 时 λ 为一正一负,即由图 10.2 的第一象限穿过实轴($q=0$)到第四象限.令

$$q(\beta,k)=0 \tag{10.22}$$

所确定的曲线见图 10.3.

将(10.21)式对 k^2 微商并令其等于零,即

$$\frac{\partial q(\beta,k)}{\partial(k^2)}=0, \tag{10.23}$$

可得到 $q(\beta,k)=0$ 的最小值,相应的 k^2 为

$$k^2=\frac{(\beta-1)D_v-\alpha^2 D_u}{2D_uD_v}. \tag{10.24}$$

令(10.21)式中 $q=0$,求得

$$(\beta-1)D_v-\alpha^2 D_u=\frac{\alpha^2}{k^2}+k^2 D_uD_v.$$

代入(10.24)式,得到

$$\frac{\alpha^2}{k^2}=k^2 D_uD_v,$$

即

$$k^2=\frac{\alpha}{\sqrt{D_uD_v}}. \tag{10.25}$$

和 k^2 对应的 β 可以由(10.25)式代入到(10.22)式得到,

$$\beta_{\min}=\left(1+\alpha\sqrt{\frac{D_u}{D_v}}\right)^2. \tag{10.26}$$

总之,图灵不稳定既要求 $p>0$(对 $k=0$ 也如此),由(10.21)式,得

$$1-\beta+\alpha^2>0$$

或

$$\beta-1-\alpha^2<0, \tag{10.27}$$

还要求 $q<0$,由(10.26)式,得

$$(\beta-1)\frac{D_v}{D_u}-\alpha^2>2\alpha\sqrt{\frac{D_v}{D_u}}, \tag{10.28}$$

这就要求

$$D_v\gg D_u. \tag{10.29}$$

(10.29)式意味着反应物 u 的扩散系数 D_u 要远小于反应物 v 的扩散系数 D_v. 反应物 u 称为“活化子”,它存在加速其本身反应的机制,即自催化机制;反应物 v 称为“禁阻子”,它的作用与自催化反应相反. 因此,常常说图灵失稳是由于禁阻子的扩散快于活化子的扩散速度而引起的失稳. 图 10.4 给出了六边形的斑点和条纹斑图. 从图 10.4 看出,这种自组织现象可以出现六角形斑图,见图 10.4(a)和 10.4(b),也可以是条状斑图,见图 10.4(c),也可以排成条状的斑点组织的混合斑图,见图 10.4(d).

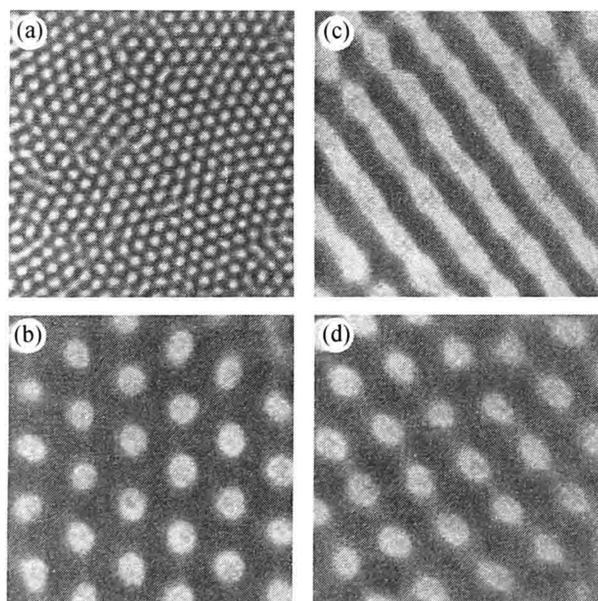


图 10.4 图灵斑图

具体看一下图灵斑图的出现. 最初活化子浓度很高(见图 10.5 黑色区域),扰动引起活化子和禁阻子浓度增加,由于禁阻子比活化子扩散得快,因而相对来说,禁阻子在原区域外的浓度(白色区域)比活化子高,就形成了一个禁阻子的边界,其中活化子和禁阻子形成规则的状态(例如六角形). 这里没有活化子或禁阻子被产生的问题,只有扩散快慢造成的浓度分布不同. 如果初始另有局地活化子的斑图,受到扰动后还可以再激发而形成在空间周期性的重复. 反应扩散系统既有反应项 f 和 g 这种源项,又有耗散扩散项,这就形成了和外界周期性交换能量的适应系统.

为什么会形成不同形状的斑图? 朗道在 1944 年提出的相变理论认为,若只有线性项,那么增长较快的模 $|A|$(一般称为慢模)占优. 但是当到达分岔时(如图灵分岔时),由于非线性的作用,使增长受到抑制,故在线性项后增加了一个三阶非线性项,即

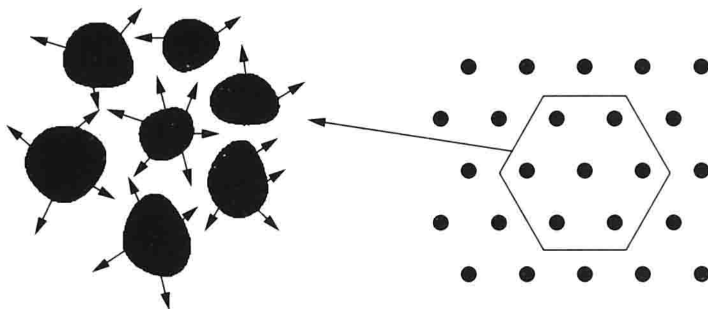


图 10.5 禁阻子扩散快于活化子

$$\frac{\mathrm{d}|A|}{\mathrm{d}t}=\mu|A|-\sigma|A|^3. \tag{10.30}$$

上述方程的一个定常解 $|A|=\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}$ 从极坐标系看就是一个周期解. 在图灵斑图中,它就对应于条状周期斑图.

若在二维斑图中有 N 个波(例如 $N=3$),则上述方程改为

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}=\mu A_i+\sigma(A_1A_2+A_2A_3+A_2A_1) \quad (i=1,2,3). \tag{10.31}$$

该方程中非线性两波相互作用项为非齐次项. 当非齐次项中有振荡与原方程的固有振荡发生共振时,非齐次方程的解与齐次方程的解的形式不同. 设 A_i 的振荡波矢分别为 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$,有

$$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{0}, \tag{10.32}$$

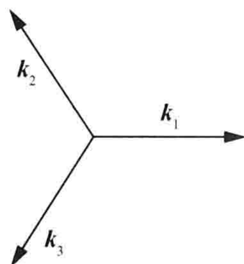


图 10.6 三波共振

见图 10.6. 此时波矢量 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 之间的角成 120°,称为三波共振. 这在空间中就形成六角形斑图.

为什么螺旋斑图和分形相联系呢? 一方面是因为第三章提到的螺旋具有标度不变性,另一方面,如在实际的大气对流中常出现的是螺旋斑图,而且对流涡旋中的不稳定会造成大涡旋中有小涡旋,小涡旋中还会有更小的涡旋,这就形成了涡旋的层次结构的分形现象.

§10.3 临界性和自组织临界性

物理学中的相变和临界现象中相变的临界点只是相图上的一个点(如 $T=T_c$). 在该点上各种尺度的涨落均有,因而是无特征尺度现象. 临界点可以通过改变参数(如温度)而达到. 但是自然界还存在另一种临界性,称为自组织临界性. 比如地震,正像第一章介绍的那样,小地震发生的次数多,大地震发生的次数少,地球总是处于临界状态. 沙堆(图 10.7)也存在这种现象. 若我们抓一把沙

子，并且慢慢地往下漏，就会形成一个小沙堆．若再往下加沙子，当其斜率超过一个临界值时，沙堆可能有小的塌方．但再加沙子，沙堆可能克服沙子间的摩擦力发生大的塌方．等到沙子又形成一个沙堆后，这种大小塌方还会发生，也就是说沙堆随时都处在临界状态，即加入沙子的平均质量通量等于平均流出的通量．又如第一章介绍的$\frac{1}{f}$噪声、湍流等现象，它们随时都处于临界状态，只是频率 f 高（即时间尺度小）或波数 k 大（即空间尺度小）的能量小，f 低或 k 小的能量大．高低频的噪声，大小的涡旋同处于一个系统．

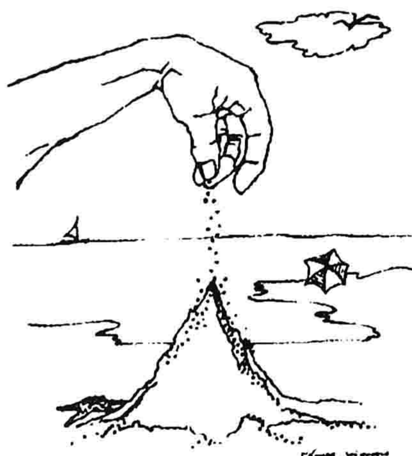


图 10.7　不断给沙堆加上沙子

1988 年，拜克(Bak)和汤超研究了由许多单元构成的系统，如地震由大小板块构成，沙堆由许多沙子构成，湍流由许多涡旋构成等，这些单元之间的关系又非常密切，并有相互作用，它们自然组织成一种稳固的临界状态．该系统受到扰动后大大小小的事件均可能发生（像大小地震、大小塌方、大大小小的湍流涨落、各种频率等），事件发生后又自发演化成临界状态，因此大事件和小事件可能出自同一个原因．

大家关注的气候本身就是一个多尺度系统，因此大的气候极值事件和小的气候变化一般都处在一个系统中．大大小小的气候变化随时都可能发生，气候系统就是一个处在自组织临界状态的复杂系统，很难说变化小的事件就是"正常"，变化大的事件（极值事件）就是"异常"．

这些系统通常要和外界发生能量交换，外界供给的能量要被各个单元之间的相互作用耗散掉．

下面说明有特征尺度的动力系统和临界动力系统的差别．通常的动力系统是有确定的时间和空间尺度的，例如阻尼振荡方程(10.3)中的

$$\frac{1}{\gamma}$$

和

$$\frac{1}{\omega_0} \tag{10.33}$$

分别为弛豫时间尺度与振荡的内在时间尺度．这种有特征尺度系统的物理量的相关函数 $R(r)$ 通常是指数函数形式：

$$R(r) \sim \mathrm{e}^{-\frac{r}{\xi}}, \tag{10.34}$$

其中 ξ 是关联长度，在时间领域则表示弛豫时间. 当距离 r 比关联长度 ξ 大很多时 $R(r)\to 0$，即长程相关不能建立，但是系统处于相变的临界点时，在第二章我们已经说明是无特征尺度的，此时相关函数为幂函数形式

$$R(r)\propto\frac{1}{r^{d-2+\eta}},\tag{10.35}$$

其中 d 是系统的维数，η 是临界指数. 一个带有幂函数(10.35)式的相关函数的动力系统称为临界的或标度不变的.

动力系统的临界性，意味着在所有尺度上都出现涨落. 这时系统的性质再也不像方程(10.3)由参数值(10.33)决定，而是由控制方程的结构以及对称性所决定，这解释了相变现象的普适性. 正是由于这种临界性的相关函数(10.35)，长程相关成为可能. 动力系统的临界性将原来有特征尺度的系统变成了无特征尺度系统，使相关函数形成幂函数分布，即小尺度发生的次数多，大尺度发生的次数少.

对有特征尺度系统，(10.3)式只有一个弛豫时间 $\tau=\frac{1}{\gamma}$，一个内在特征频率 ω_0，那么自相关函数是指数函数形式

$$R(r)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t-\frac{t}{\tau}},$$

它的傅里叶变换就是功率谱

$$S(f)=\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{\mathrm{i}(f-\omega_0)-\frac{1}{\tau}}\right)=\frac{\tau^2}{1+\tau^2(f-\omega_0)^2}.\tag{10.36}$$

因此当 $f\gg\frac{1}{\tau}$ 时，功率谱为

$$S(f)\approx\frac{1}{f^2}.\tag{10.37}$$

这就是布朗运动的功率谱.

对于自组织临界现象，动力系统中存在各种尺度的弛豫时间 τ，形成一种幂函数分布

$$p(\tau)\approx\frac{1}{\tau^\alpha}.\tag{10.38}$$

(10.38)式说明，时间尺度 τ 大的事件发生次数少，τ 小的事件发生次数多. 因此用这种分布 $p(\tau)$ 去加权单个 τ 的功率谱(10.36)，可得到

$$\begin{aligned}S(f)&=\int_0^\infty p(\tau)\frac{\tau}{1+(\tau f)^2}\mathrm{d}\tau\approx\int_0^\infty\frac{\tau^{1-\alpha}}{1+(\tau f)^2}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{f\cdot f^{1-\alpha}}\int_0^\infty\frac{(f\tau)^{1-\alpha}}{1+(f\tau)^2}\mathrm{d}(f\tau)\approx f^{-(2-\alpha)}.\end{aligned}\tag{10.39}$$

只要 $0<\alpha<2$，(10.39)式就是 $\frac{1}{f}$ 噪声、湍流、地震等随机运动的功率谱. 也就是

说,有特征尺度的功率谱经过不同尺度 τ 的加权,就变成了无特征尺度功率谱.一般把布朗运动称为有特征尺度的随机运动,而其余的 $0<\alpha<2$ 的随机运动可以理解成无特征尺度随机运动.

§ 10.4 沙堆模型

对于图 10.7 那样的沙堆,我们可以设计一维沙堆模型. 当沙堆的斜率超过一个临界值时,沙堆将从一个位置"崩塌"到下一个临近位置. 我们考虑由 N 个位置组成的一维格子,见图 10.8(a). 在图 10.8 中,格子临近 $i=1$ 位置的左边界设想成一个"壁",防止沙粒从左边逃逸,而靠近 $i=N$ 的右边界是开放的,沙粒可以从右边掉出去. 用 i 处的沙粒数目 h_i 代表高度,而位置 i 处的沙堆斜率用 $z_i=h_i-h_{i+1}$ 来表示,并设 $i=N+1$ 处的沙堆斜率为零,即 $z_{N+1}=0$. 当沙堆在随机的位置 i 上加一沙粒,即 $h_i \to h_i+1$,若 i 处的沙堆斜率 z_i 超过一个临界值 z_c(例如 $z_c=1$)时,则沙粒就从位置 i 崩塌到位置 $i+1$,即 $h_i \to h_i-1$,而 $h_{i+1} \to h_{i+1}+1$. 从图 10.8 (a)看出,崩塌的结果在 $i=2$ 的位置上增加了一粒沙子,此时 $i=2$ 处的沙堆斜率又超过 1,它又崩塌到 $i=3$ 的位置上. 当崩塌到位置 $i=4$ 时,这种过程才终止. 这是驱动过程. 图 10.8(a)的黑方块表示沙堆粒子. 当在 $i=1$ 处加一粒沙子后,沙粒从位置 i 移到位置 $i+1$(例如 $i=1$),i 处的斜率则减少 2,即 $z_i \to z_i-2$,和 i 相邻处的斜率会增加 1,即 $z_{i+1} \to z_{i+1}+1$. 这是弛豫过程. 图 10.8(b)的黑方块表示斜率.

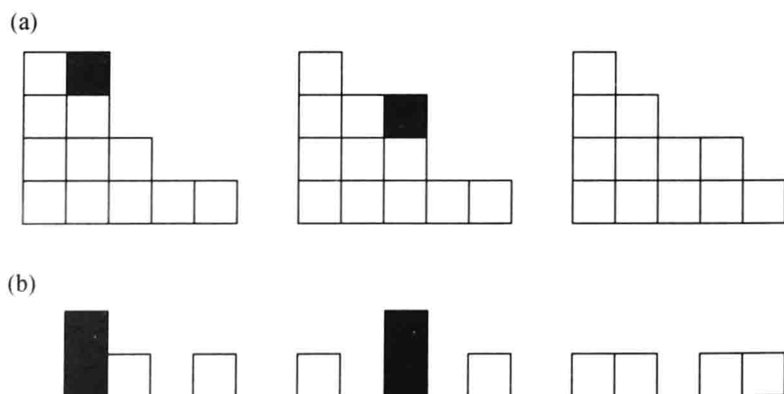


图 10.8 一维沙堆模型

对一维沙堆模型的论述很多有关自组织临界现象中的著作中都有,现在重点介绍二维沙堆模型.

图 10.9 是一个方格数为 $N\times N$(例如 $N=5$)的二维格子,每个方格中的数字表示格子中的沙粒数目 z_i. 我们假设每个格子的沙粒临界数目为 $z_c=3$. 图

10.9(a)中只有一个黑色的格子沙粒数为4．沙堆驱动过程就是随机地在一个格子里加上一个沙粒(例如黑色格子由3粒沙子变成4粒沙子)．当格子中的沙粒数超过z_c时，此格子的沙堆就崩塌，4个粒子就均匀地流向与之相邻的四个格子中去，见图10.9(b)，即与之相邻的4个格子中的沙粒各增加1．此时图10.9(b)中黑色的格子的沙粒数由3增加到4，又超过了临界值$z_c=3$，它又崩塌到图10.9(c)，直到都有格子中的粒子数$z_i \leqslant z_c=3$为止．这种粒子数的配置称为稳定的临界状态．

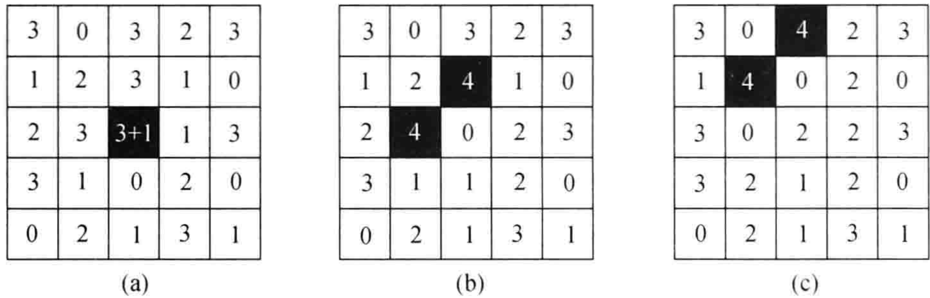


图 10.9　二维沙堆模型

我们定义s为崩塌期间崩塌的粒子总数，它代表崩塌的尺寸．崩塌粒子数有多有少．若$N \times N$的格子数很大，我们可以统计出大于s的崩塌频数(或概率)$p(\geqslant s)$满足如下的幂律关系

$$p(s) \sim s^{-\tau}. \tag{10.40}$$

图10.10分别是32×32，128×128，512×512，2048×2048的格子模拟出的结果．从图上看出$\tau \approx 0.25$．

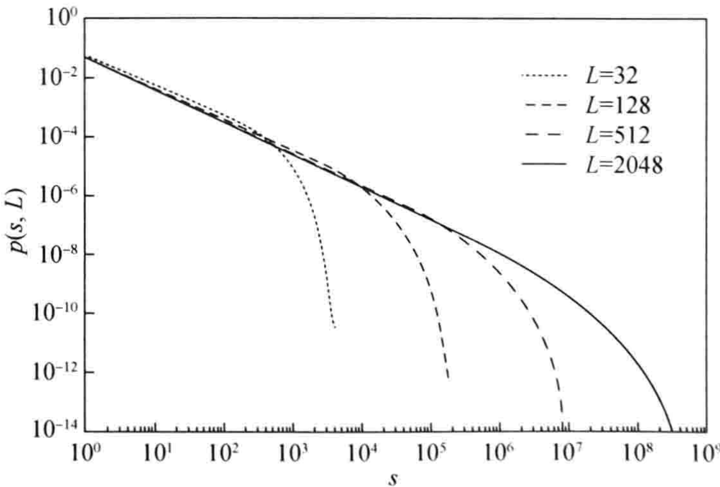


图 10.10　崩塌频数 p 和尺寸 s 关系

引自 C. Gros (2008)

§ 10.5　与斐波那契数有关的自相似螺旋结构

自然界经常有自组织、自相似的螺旋结构.

我们已经知道由映射

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (F_0=F_1=1) \tag{10.41}$$

所产生的序列 1,2,3,5,13,21,…就是斐波那契序列. 而相邻两个斐波那契数之比的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi \tag{10.42}$$

称为黄金分割数. 由于迭代过程(10.41)本身就是多次反复的过程,因此由斐波那契数形成的结果也是自相似的.

我们从一个长边为 1 和$\frac{1}{\phi}$的矩形 $ABCD$ 作为种子矩形开始,逐步扩大成一系列长宽比均为 ϕ 的矩形 $BCEF$,$CEGH$,$EGIJ$,…,即$\frac{BC}{AB}=\frac{CE}{BC}=\frac{EG}{CE}=\frac{GI}{EG}=\phi$.

由(10.41)式两边同除以 F_{n+1},得

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}=1+\frac{F_n}{F_{n+1}}. \tag{10.43}$$

按(10.42)式,得

$$\phi=1+\frac{1}{\phi}$$

或

$$\phi^2-\phi-1=0. \tag{10.44}$$

方程(10.44)式的一个根 $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 即为黄金分割数.

我们考虑公比为 ϕ 的两个方向的等比序列

$$\cdots,\frac{1}{\phi^3},\frac{1}{\phi^2},\frac{1}{\phi},1,\phi,\phi^2,\phi^3,\cdots. \tag{10.45}$$

由于$\frac{1}{\phi}=\phi-1$,$\frac{1}{\phi^2}=1-\frac{1}{\phi}=1-(\phi-1)=2-\phi$,…,序列(10.45)又可以写成

$$\cdots,(2\phi-3),(2-\phi),(\phi-1),1,\phi,(1+\phi),(1+2\phi),\cdots. \tag{10.46}$$

序列(10.46)式正是斐波那契序列,因为前两项之和等于第三项,而序列(10.46)的相邻两项之比就是黄金分割数 ϕ

$$\phi=\frac{1+\phi}{\phi}=\frac{1+2\phi}{1+\phi}=\frac{2+3\phi}{1+2\phi}=\frac{3+5\phi}{2+3\phi}=\frac{5+8\phi}{3+5\phi}=\cdots. \tag{10.47}$$

图 10.11 的各种矩形的边长就是(10.47)式中的分子和分母，而连接矩形的对角线顶点 $C,E,G,I,\cdots$所构成的曲线就是逆时针旋转的螺旋. 假如我们从(10.47)式的后面向前看，虽然长度和宽度之比为 ϕ，但是长度还是不断缩小. 设后面矩

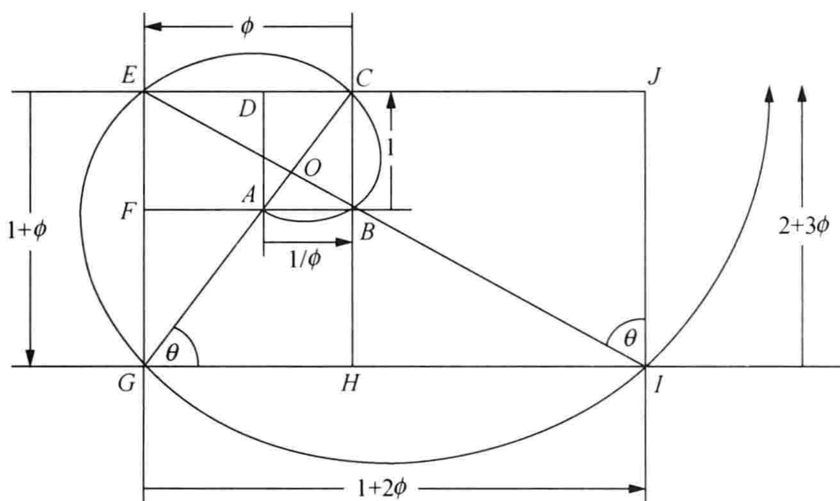


图 10.11 逆时针黄金比矩形螺旋

形长度为 L_n，前面相邻矩形长度为 L_{n+1}，则由(10.47)式，得到

$$L_n=\phi L_{n+1}$$

或

$$L_{n+1}=\frac{1}{\phi}L_n. \tag{10.48}$$

(10.48)式说明矩形的长度的收缩比为 ϕ. (10.48)式正是分形自相似的尺度变换. 类似地，由于

$$\phi=\frac{1}{\phi-1}=\frac{\phi-1}{2-\phi}=\frac{2-\phi}{2\phi-3}=\frac{2\phi-3}{5-3\phi}=\cdots, \tag{10.49}$$

(10.49)式的分子分母连续构成的矩形的对角线顶点相连形成的曲线就是顺时针旋转的螺旋.

图 10.12 是以一个边长为 1 的单位方形(阴影部分)作为种子，然后不断按斐波那契数构成边长为 1,2,3,5,8 的正方形的. 这些方形的顶点相连构成逆时针旋转的螺旋结构. 图 10.13 中有一个等腰三角形 ABC，其中$\angle ABC=72^\circ=\frac{2\pi}{5}$，因此$\angle CAB=36^\circ=\frac{\pi}{5}$. 同时由$\angle CBA$ 的平分线 BD 又作出一个等腰三角形 CBD. 令等腰三角形的腰长为 a，底长为 b，那么由 ΔACB 和 ΔCBD 相似，有

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}. \tag{10.50}$$

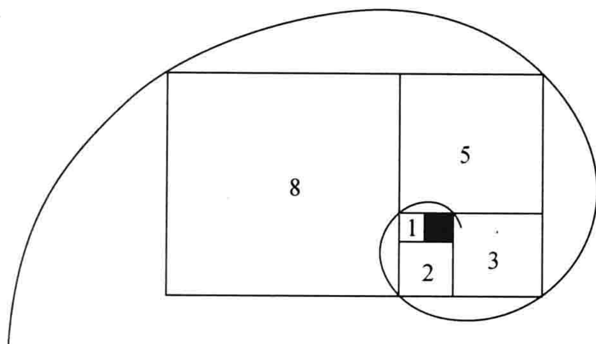


图 10.12 斐波那契螺旋

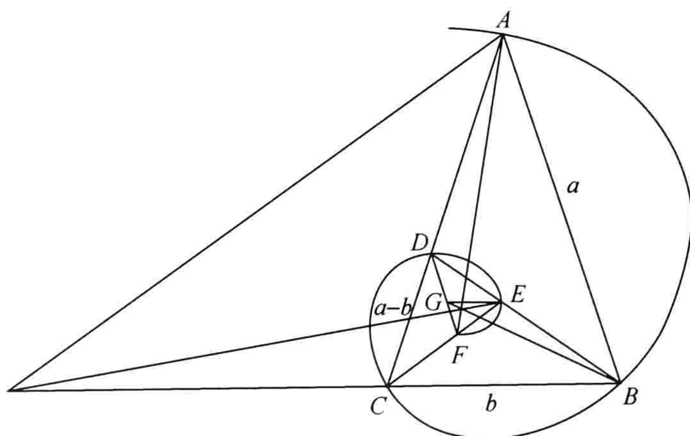


图 10.13 黄金分割三角形螺旋

由(10.50)式,得

$$a^2 - ab = b^2.$$

将两边除以 b^2,得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0. \tag{10.51}$$

将(10.51)式和(10.45)式比较看出,图 10.13 的等腰三角形的腰长 a 和底长 b 之比为

$$\frac{a}{b} = \phi \approx 1.618, \tag{10.52}$$

也是黄金分割数. 将图 10.13 的过程继续下去,又得到更小的等腰三角形 $\triangle CED$,$\triangle EDF$,$\triangle EFG$ 等等. 将这些相似的等腰三角形的底边顶点 F,E,D,C,B,A 相连接,得到一个逆时针的螺旋结构. 上述几个黄金分割螺旋说明,自相似的标度律和(螺旋)结构明显地联系在一起,也就是和幂函数相联系.

我们已经在第二章迭代函数系统中论述了自相似的分形树. 图 10.14 和图 10.15 介绍了一个树干 7 年里长出的分枝树. 从图上看出,它们 7 年中的分枝树

的枝条数分别为 1,1,2,3,5,8,13,…,正好也是斐波那契数. 我们将把分形树和斐波那契数相联系.

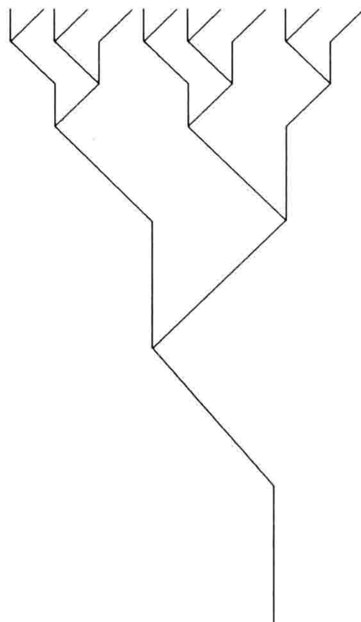


图 10.14 分形树

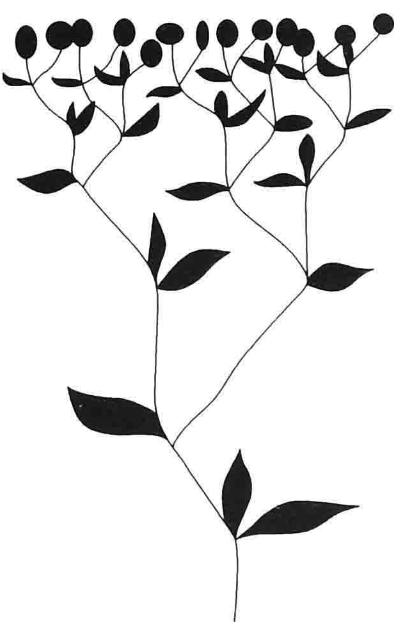


图 10.15 草木植物树

我们先从树干长度为 1 开始,干的顶部张开 120°分成两个长度为 ϕ 的分枝,然后又分成张开 120°长度为 ϕ^2 的分枝. 这种过程不断下去,形成的树见图 10.16. 现在要问,怎样的 ϕ 能够使得长出的树枝不重叠但又没有再介入的空间呢? 我们从长度为 ϕ 的树枝来看图 10.16 中水平方向的距离. 显然,这就要求 $\phi\cos30° = \phi^3\cos30° + \phi^4\cos30° + \phi^5\cos30° + \cdots$,所以

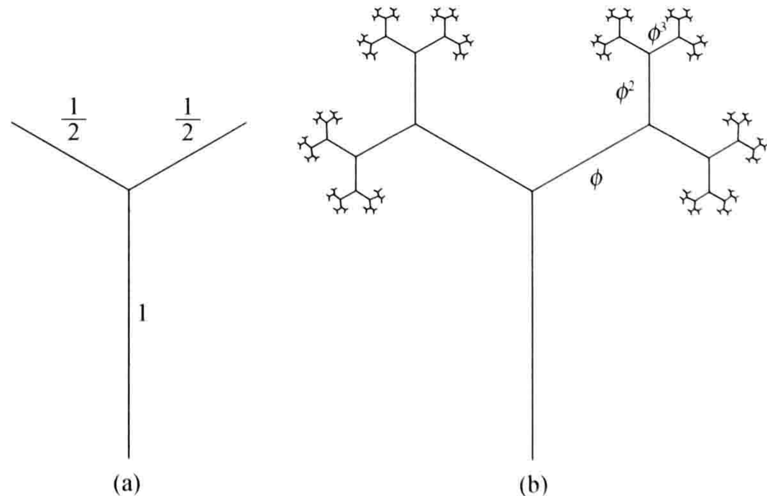


图 10.16 分形树

$$\phi=\phi^3+\phi^4+\phi^5+\cdots. \tag{10.53}$$

(10.53)式右边是首项为 ϕ^3,公比为 ϕ 的等比级数,因而其和为$\dfrac{\phi^3}{1-\phi}$,(10.53)式变成

$$\phi=\frac{\phi^3}{1-\phi}. \tag{10.54}$$

由(10.54)式,得

$$\phi^2+\phi-1=0, \tag{10.55}$$

正是黄金分割数 ϕ 满足的方程(10.44). 图 10.17 正是长出的这种美丽紧密而又不重叠的树.

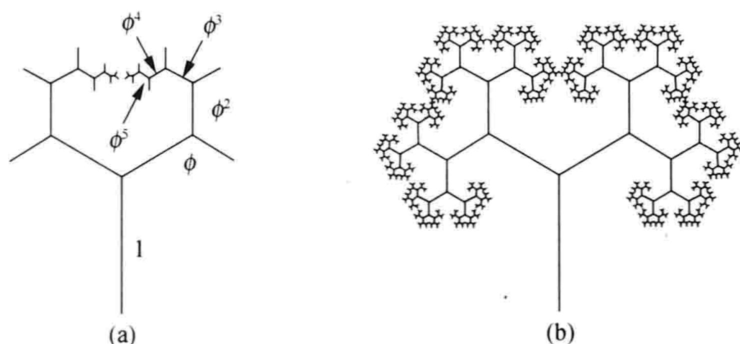


图 10.17 紧密不重叠的黄金分割树

由计算分数维的公式(2.8)式,图 10.17 的树枝的分数维为

$$D=\frac{\ln N}{\ln\dfrac{1}{r}}\approx\frac{\ln 2}{\ln 1.618}\approx 1.4404. \tag{10.56}$$

为了看清楚它和螺旋相联系,我们将图 10.16 的线段变成二维的一个树叶状形式,那么图 10.16 就变成图 10.18. 若这种树叶长得很茂盛,如图 10.19,从最小的树叶看,它们也是两边长出的双螺旋结构.

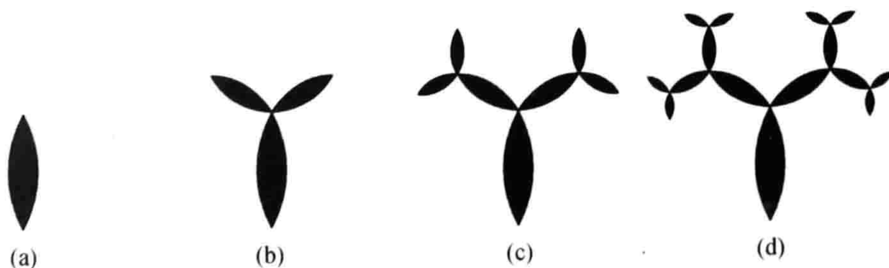


图 10.18 黄金分割树的演化

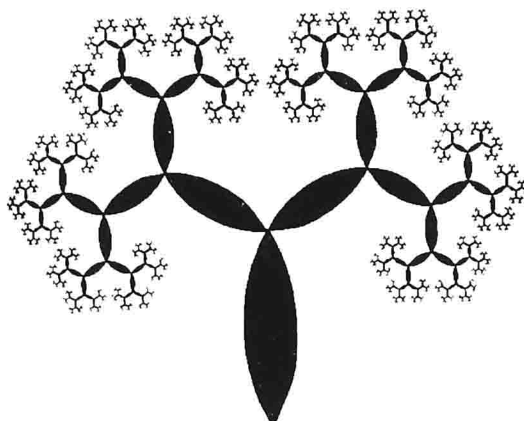


图 10.19　黄金分割树形成的双螺旋

§10.6　由伸长、折叠、扭转而形成的多层次结构

§3.6 中我们谈到非线性物理就是伸长、折叠和扭转，第九章混沌时间序列中又谈到伸长和折叠使混沌有正的李雅普诺夫指数，这一节我们仅从结构上来谈.

伸长将原来相近的点分开，折叠将稀疏的点拉近，这就意味着物理学上的相混. 但是多次伸长、折叠便形成多层次结构.

在流体力学中很多运动(如龙卷风)是在涡管上进行的，类似地，在电磁学中导体常处在磁力线中，见图 10.20. 由于流体力学中涡度 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ 的散度为零，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0, \tag{10.57}$$

因此由散度定理，得

$$\oint_S \boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{S_2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}-\int_{S_1}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0,$$

即

$$\int_{S_2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{S_1}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{10.58}$$

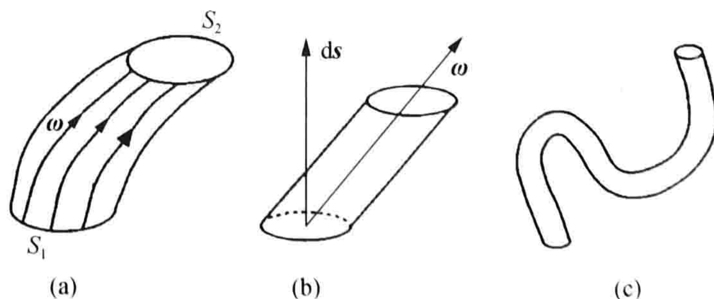


图 10.20　涡管

(10.58)式说明，在涡管的横截面上，通过涡管的通量是相同的. 同样，在电学上通过磁管的磁通量也是相同的. 若涡管增加，或磁场增强，那么涡管必然伸长甚至扭转.

下面举两个例子.

(1) 图 10.21(a)原是带有磁通量 F 的一个环面. 由于磁场强度增加，使得环面伸长，其长度为原来的两倍，见图 10.21(b)，然后扭转成图 10.21(c)，最后折叠成图 10.21(d)，磁通量变成了 $2F$，但是和原来图 10.21(a)形状相同，磁通量方向相同. 这是快速发电机的基本模式.

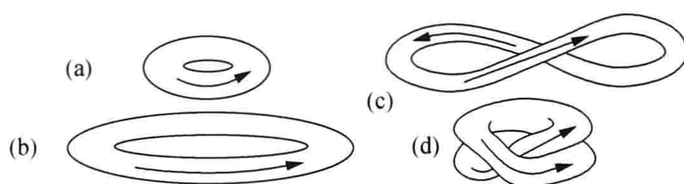


图 10.21　伸长、扭转、折叠的发电机

(2) 在用箭头表示的高空流场中，若在一个正方形网格中有黑白相间的温度分布，如图 10.22(a)，由于流场的变形经过伸长，折叠甚至扭转，温度分布发生很大变化，总体上这种过程增加了原来的温度梯度. 温度的黑白对比仅在一个很窄长的几乎是一条线上，从而获得了像大气锋面那样两边的温度差别很大的结构.

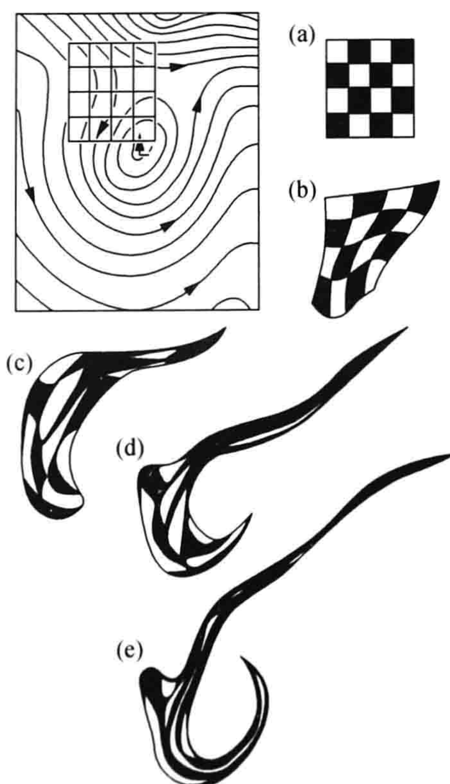


图 10.22　嵌入在高空流场中的温度分布格子

这两个例子虽然只经过一次伸长、折叠和扭转过程，就已经产生了比较复杂的结构，若多次重复这种过程，必然产生多层次的丰富结构.

虽然我们在第三章已经介绍了二维面包师变换，但是从理论上讲，最能反映伸长、折叠甚至扭转过程的是著名的马蹄映射. 单位方块 $ABCD$ 首先在水平 x 方向收缩至 1/3，然后在垂直 y 方向上伸长 3 倍，见图 10.23，最后，折叠成一个马蹄 $A'B'C'D'$，并将它放在原来的单位方框内. 这样原来方框内阴影部分的点(x_i, y_i) 落到了方框内马蹄中阴影部

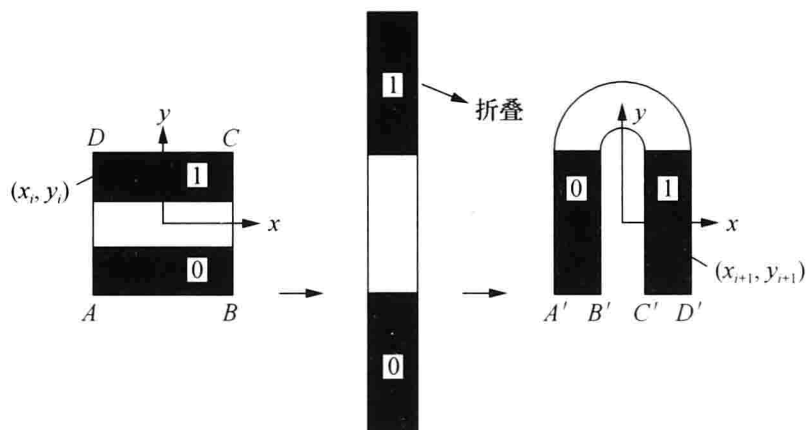


图 10.23 马蹄映射

分的点(x_{i+1},y_{i+1}). 为了区别原方块的阴影部分,将其分别用“0”和“1”标记. 显然标记“0”的部分映射后并未旋转,而标记“1”的部分映射后旋转了180°. 原来方块中的白色部分,映射以后则到了方块外边. 从伸长和收缩来看,这是一个线性操作,而折叠则是高度非线性的.

按照图 10.23 的坐标,原方块的阴影区域的映射表达式为

$$x_{i+1}=\begin{cases}(x_i-1)/3, & y_i\leqslant-\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 0,\text{未旋转}),\\ (1-x_i)/3, & y_i\geqslant\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 1,\text{旋转}),\end{cases} \tag{10.59}$$

$$y_{i+1}=\begin{cases}3y_i+1, & y_i\leqslant-\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 0,\text{未旋转}),\\ 1-3y_i, & y_i\geqslant\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 1,\text{旋转}).\end{cases} \tag{10.60}$$

这里的非线性反映在区域 0 和 1 的表达式的差别,即分段线性. 马蹄映射(10.59)和(10.60)式是可逆的,由点(x_i,y_i),可以由下式求得(x_{i-1},y_{i-1}):

$$x_{i-1}=\begin{cases}3x_i-1, & x_i\leqslant-\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 0,\text{未旋转}),\\ 1-3x_i, & x_i\geqslant\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 1,\text{旋转}),\end{cases} \tag{10.61}$$

$$y_{i-1}=\begin{cases}\dfrac{y_i-1}{3}, & x_i\leqslant-\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 0,\text{未旋转}),\\ \dfrac{(1-y_i)}{3}, & x_i\geqslant\dfrac{1}{6} \quad (\text{区域 } 1,\text{旋转}).\end{cases} \tag{10.62}$$

我们关心的是初始条件(x_0, y_0)的点集. 无论向前(映射)还是向后(逆映射)的点都落在方块内的集合,称为不变集合. 从图 10.24 看出,原方块的$|y|<\frac{1}{6}$的白色区域向前迭代已跑出方块外,所以它不属于不变集合. 类似地,$|x|<\frac{1}{6}$的最后方块的白色区域,在逆映射(10.61)和(10.62)下也落不到单位方块内,所以也不是不变集. 因此不变集必须处在图 10.24 的阴影区域中.

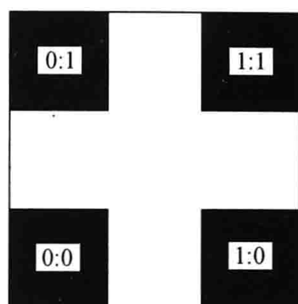


图 10.24 马蹄映射的一次向前和一次向后迭代

在图 10.24 中用":"隔开标记的"0"和"1"也是表示不旋转和旋转. 例如图 10.24 中的左上角标记"0:1"表示该区域内的点前一次迭代是不旋转的,而下一次迭代则是旋转的. 因此符号":"左边的数字告诉我们过去的轨迹,右边的数字告诉我们将来的轨迹.

图 10.25 显示小方块做两次连续马蹄映射的结果. 在图 10.25 左边初始方块内阴影部分符号":"后面有两个数字,分别表示两次迭代中的每一次它们是否旋转. 例如左上角的符号":10"表示第一次迭代旋转,而第二次迭代不旋转.

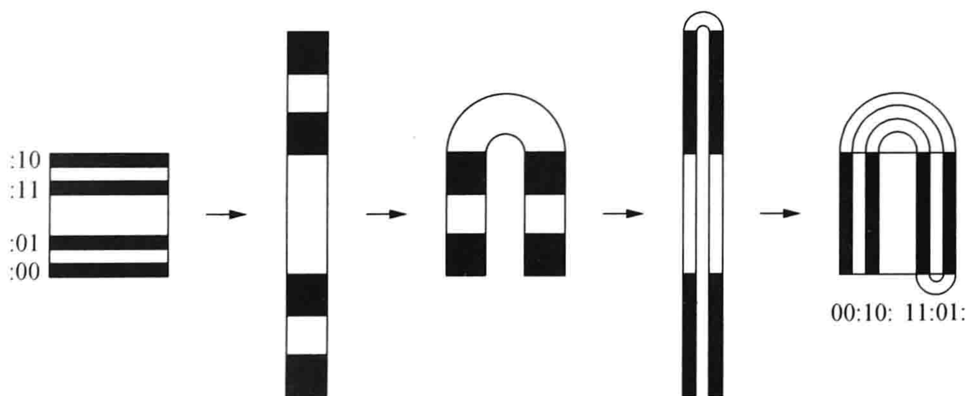


图 10.25 马蹄映射的连续迭代

图 10.25 最后一图的垂直阴影条下符号":"前面的两个数是表示向后两次迭代是否旋转. 例如最后一个垂直阴影条的标记"01:"表示前一次向后迭代旋转,在这次迭代以前的那次不旋转,因此要求初始点(x_0, y_0)在向前和向后迭代中都必须处在单位方框内初始的水平阴影带和最后的垂直阴影带的交集,即图 10.26 的 16 个小阴影方块内. 虽然图 10.26 只是向前和向后各两次迭代的结果,但是从图 10.24 看,一次向前和向后迭代变成四个尺度为$\frac{1}{3}$的小方块,两次

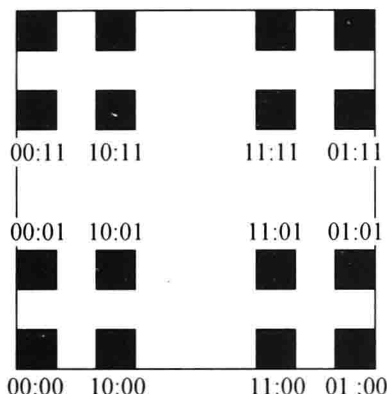


图 10.26　两次向前和两次向后迭代保持在区域中的 16 个小方块

向前向后迭代变成尺度为 $\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$ 的 16 个小方块. 在平面上,两次马蹄影射就形成平面上漂亮的斑图结构.

这种伸长、折叠甚至扭转的结果形成一个二维康托尔不变集. 做 n 次迭代,取尺寸 $r=\frac{1}{3^n}$,可得到 $N=4^n$ 个小方块,因此分数维

$$D=\frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}=\frac{n\ln 4}{n\ln 3}=\frac{\ln 4}{\ln 3}\approx 1.2618. \tag{10.63}$$

§10.7　可激发系统的行波结构和孤波宽谱结构

反应扩散方程为

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}&=f(u,v)+D_u\nabla^2 u,\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=g(u,v)+D_v\nabla^2 v, \end{aligned} \tag{10.64}$$

其中 f,g 是非线性反应项,$\nabla^2 u,\nabla^2 v$ 是扩散项,$\varepsilon\ll 1$ 是小参数,$f(u,v)$通常是一个非线性函数,$g(u,v)$是一个线性函数,见图 10.27. 由于 ε 特别小,$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}$可以表示为$\frac{\partial u}{\partial\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}$,在 $t=\varepsilon$ 时就相当于$\frac{\partial v}{\partial t}$中的 t,而变量 u 的动力学时间尺度远远小于变量 v 的时间尺度,因此 u 称为快变量(也称为触发变量),v 称为慢变量(也称为恢复变量),系统(10.64)称为可激发系统. 系统首先很快地被激发,离开

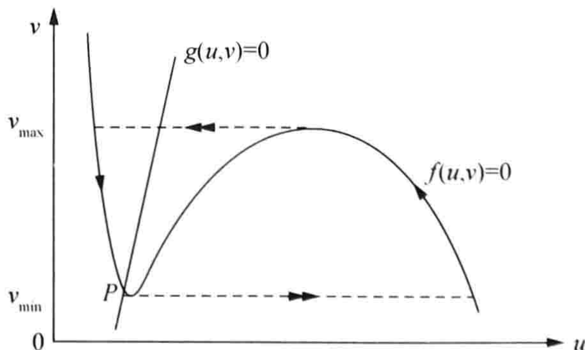


图 10.27　反应扩散方程中的 f 和 g 图像

$f(u,v)=0$ 和 $g(u,v)=0$ 的交点 P,到达 $f(u,v)=0$ 的右分支,然后沿着这个分支 v 慢慢到达 $v_{\max}$,又沿着图 10.27 的虚线到 $f(u,v)=0$ 的左分支,最后又回到 P 点附近. 这个过程形成一个波峰,见图 10.28.

如果激发源的激发是周期性产生的,系统就表现为一连串的行波,犹如心电图一样,见图 10.29. 实际上心脏的脉搏是不规则的,是一种分形时间序列. 上述的波峰结构很像一个孤立波序列. 在物理学中早已研究过孤立波,如 KdV 方程的孤立波,见图 10.30. 从图形和"孤立"二字就可以知道,它在时间轴上仅有一个波峰,因而波的周期 T 是无穷大,波的频率 $\omega\to 0$. 这种现象在非线性物理学中很常见.

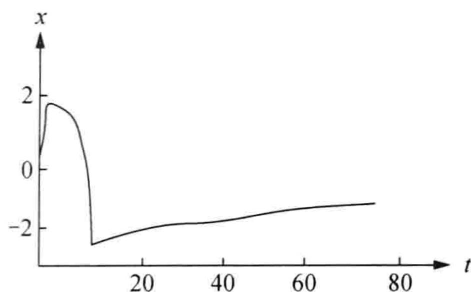


图 10.28 可激发系统的波峰

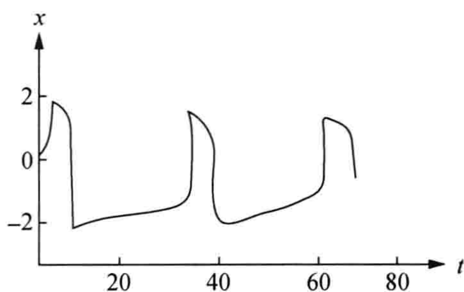


图 10.29 心电图的连续波峰

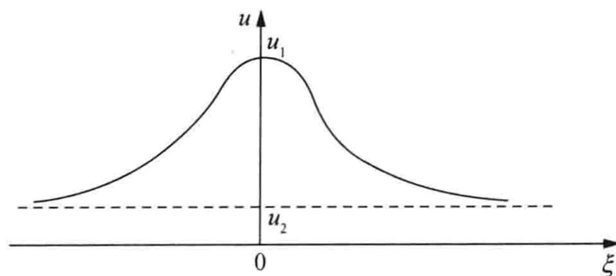


图 10.30 孤立波形状

我们以单摆方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2\sin x=0 \tag{10.65}$$

为例,它在相平面$(x,\dot{x})$上的相轨迹如图 10.31. 图中点$(0,0)$和$(\pi,0)$是方程(10.65)的奇点. 将方程(10.65)化成方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-\omega_0^2\sin x,\end{cases} \tag{10.66}$$

令(10.66)式右端为零,就得到这两个奇点. $(0,0)$称为中心点,它相当于单摆的下方点,奇点$(\pi,0)$称为鞍点,它相当于单摆的最上方的点. 图中离$(0,0)$较近的

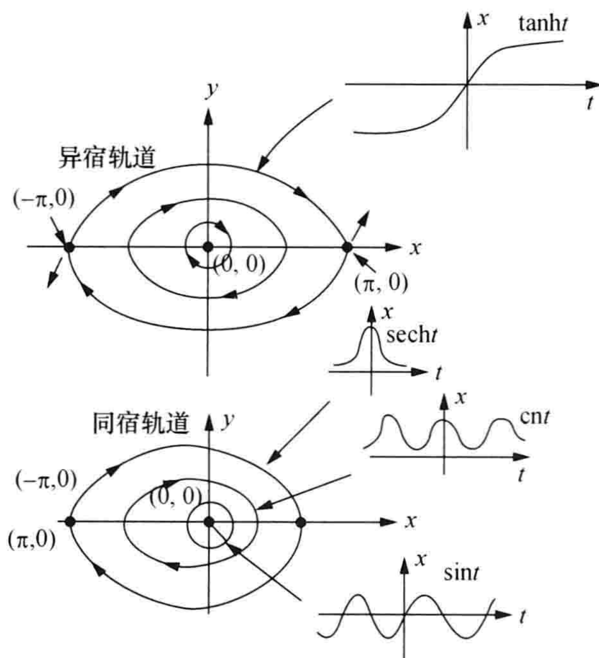


图 10.31　单摆相平面$(x,\dot{x})$上轨迹及其相应的波

轨道相当于(10.65)式中 x 较小时，$\sin x$ 用 x 来近似，因而方程(10.65)式变成

$$\ddot{x}+\omega_0 x=0. \tag{10.67}$$

(10.67)式的解是

$$\begin{aligned} x &= \sin\omega_0 t, \\ x &= \cos\omega_0 t, \end{aligned} \tag{10.68}$$

表示围绕单摆下方(0,0)的小振幅振荡，振荡频率是 ω_0，周期是$\frac{2\pi}{\omega_0}$. 而图 10.29 中离(0,0)点距离大一点的轨道是椭圆轨道，它可以用椭圆函数来表达，即

$$\sin\frac{x}{2}=k\operatorname{sn}(\omega_0 t,k)$$

或

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\omega_0 t}, \tag{10.69}$$

其中 sn 称为贾可比椭圆正弦函数.

利用微商公式，有

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{sn}t)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 t}\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 t}, \tag{10.70}$$

其中 k 称为模数，那么将(10.69)式微商一次，得到

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\dot{x}=k\omega_0\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\omega_0 t}\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\omega_0 \mathrm{t}}.$$

利用(10.69)式求得角速度

$$\dot{x}=2k\omega_0\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\omega_0 t},\tag{10.71}$$

再利用公式

$$\mathrm{sn}^2 t+\mathrm{cn}^2 t=1,\tag{10.72}$$

则(10.71)式变成

$$\dot{x}=2k\omega_0\,\mathrm{cn}(\omega_0 t,k),\tag{10.73}$$

其中 cn 称为贾可比椭圆余弦函数．这样，离(0,0)点较远的振荡代表大振幅的振荡，或称为椭圆余弦振荡，其振荡周期 T 或频率 ω 满足关系

$$N=\frac{T}{T_0}=\frac{\omega_0}{\omega}=\frac{2K}{\pi},\tag{10.74}$$

其中 K 为第一类勒让德(Legendre)椭圆积分，N 代表无量纲周期．

根据椭圆函数的性质，当 $k\to 0$ 或 $k'=\sqrt{1-k^2}\to 1$ 时，$\mathrm{cn}t\to\cos t$，$K\to\frac{\pi}{2}$，意味着(10.73)式是余弦函数，且(10.74)式中 $N\to 1$ 或周期 $T\to T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$．这就是小振幅的余弦振荡(10.68)式，其中 k' 称为余模数．但是，当 $k\to 1$ 或 $k'=\sqrt{1-k^2}\to 0$ 时，$\mathrm{cn}(t,k)\to\mathrm{sech}t$，$K\to\infty$，那么(10.73)式就是用双曲函数 sech 表示的振荡，而周期 T 由(10.74)式趋向于无穷大．这就是图 10.31 中由$(\pi,0)$出发再回到$(\pi,0)$的轨道，即由单摆的上方顺时针振动再回到单摆的上方为止．显然这种振荡的周期为无穷大．这种轨道称为同宿轨道．若将 t 换成波动参数，它就代表孤立波了．若把$(\pi,0)$，$(-\pi,0)$看成两个点，那么两点间的连线轨道称为异宿轨道，可以用双曲正切函数 tanh 表示．

在同宿轨道附近，速度场近似于孤立波脉冲状的周期序列，见图 10.32，两个相邻脉冲之间的距离接近于孤立波的周期$\frac{2\pi}{\omega}$，每个脉冲的宽度接近于$\frac{2\pi}{\omega_0}$.

归纳一下，非线性大振幅振荡称为椭圆余弦振荡．当 $k\to 0(k'\to 1)$时是正弦小振幅振荡，当 $k\to 1(k'\to 0)$时就成为周期为无穷大或频率为零的孤立振荡(从波的角度，称为孤立波)．

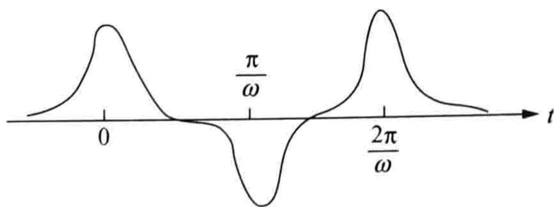


图 10.32 椭圆余弦波

孤立振荡或孤立波如何与多尺度的分形相联系呢？由于孤立振荡的频率是零，因而受到扰动后，图 10.30 常演变成图 10.33 的复杂形式，这种结

构的尺度就变成多种尺度了. 从(10.74)式中的无量纲周期 N 来讲，正余弦波从 $N>1$ 开始周期愈来愈大，成为椭圆余弦振荡，到 N 很大时就逐步变成了孤立振荡. 为了具体说明，我们将(10.73)做傅里叶级数展开($k\leqslant1$)，得到



图 10.33 振荡的孤立波

$$F(x) = 2k\omega_0 \frac{4\omega}{k\omega_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\cos(2n-1)\omega t$$

$$= 8\omega\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(2n-1)\omega t, \tag{10.75}$$

其中

$$q=\mathrm{e}^{-\pi\frac{K'}{K}}, \tag{10.76}$$

K'为模数为余模数 k'时的 K. 当 $k\to1$ 时 $K'\to\frac{\pi}{2}$，由(10.74)式，有

$$K\to\frac{\pi}{2N}, \tag{10.77}$$

所以

$$q\to\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}}. \tag{10.78}$$

因此 N 很大时，q 就很小. 傅里叶级数展开式(10.75)中余弦函数前面的系数为

$$c_n=8\omega\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}. \tag{10.79}$$

在(10.79)中，当 n 较小($1<n\leqslant N$)时，

$$c_n=8\omega\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{N}n}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}n}}\to8\omega. \tag{10.80}$$

而当 n 较大时，$n\to N$，(10.79)式中的分母第二项就很小，则

$$c_n=8\omega\mathrm{e}^{-\frac{\pi n}{N}}, \tag{10.81}$$

那么功率谱就是

$$S(n)=c_n{}^2=64\omega^2\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi}{N}}. \tag{10.82}$$

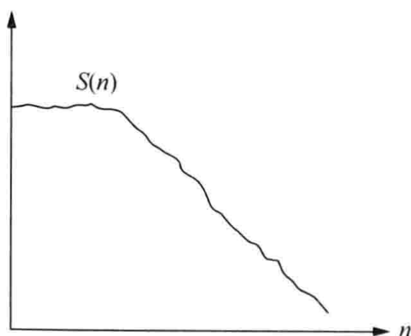


图 10.34 同宿轨道的功率谱

因此 $k\to1$ 时的功率谱形状见图 10.34. 从(10.75)式看出，图 10.34 中的 n 是波数，它可以跨越好多量级. 在 n 很大时，功率谱是一个幂函数，随着 n 的增大而衰减，正像湍流的功率谱. 因此，孤立波与分形相联系是必然的.

§10.8　分形结构出现的原因

实际的自然现象或人类生产生活中为什么会有分形结构？我们以一个水源供给系统为例．第一种方法是从水源出发，将管道连到第一家，第一家再连到第二家，如此下去，一直连到最后一家，见图10.35(a)．用户总希望尽可能地靠近水源，而供水机构则希望尽可能地使总的管道长度最小．这种方法形成一个螺旋结构．从每户家庭讲，他们的花费最小，但是从水源到最后一家用户，管道长度较大，且中间容易漏水．第二种方法是从水源直接铺管道连到每一用户，见图10.35(b)．这种方法对每个用户都方便，缺点是所要铺的管道较长．第三种方法见图10.35(c)，管道从源出发采用自相似的枝状结构．它综合了前两种方法的优点，既照顾到用户的利益，同时管道的长度也不长．又如植物生长的树枝结构，既有较大的面积以吸收阳光，同时又有空隙能使光合作用得以发挥．

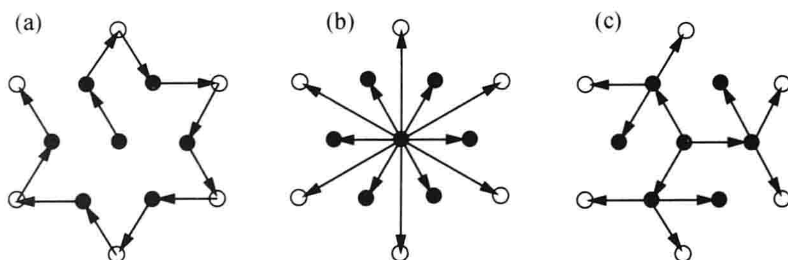


图10.35　水管布置的三种方式

从数学上讲，无论是康托尔集合，还是湍流涡旋的级联过程，无论是迭代函数系统，还是DNA的自我复制，无论是重正化群，还是细胞自动机的简单规划，它们的相同特点就是反复进行尺度变换，正像图10.35(c)一样，形成自相似的结构．

我们用s_t表示时刻t(或空间)的状态，它是由前一时刻$t-1$的状态s_{t-1}通过尺度伸长或收缩而来的，即

$$s_t=\lambda_t s_{t-1}, \tag{10.83}$$

其中λ_t是尺度的收缩或伸长比．(10.83)式表明$s_0\to s_1, s_1\to s_2,\cdots$的过程都是自相似的．同样，$s_{t-1}$是通过$s_{t-2}$的尺度变换而来，因此可得到

$$s_t=\lambda_t s_{t-1}=\lambda_t\lambda_{t-1}s_{t-2}=\cdots=(\lambda_t\lambda_{t-1}\cdots\lambda_2\lambda_1)s_0. \tag{10.84}$$

(10.84)式表示，s_t是由数目相当大的乘积项$(\lambda_t\lambda_{t-1}\cdots\lambda_2\lambda_1)$决定的．这一过程称为乘积过程．

将(10.84)式两边取对数，得

$$\ln s_t = \ln s_0 + \sum_{i=1}^{t} \ln\lambda_i. \tag{10.85}$$

(10.85)式右边是多个($i=1,2,\cdots,t$)$\ln\lambda_i$的和. s_t符合正态分布,$\ln s_t$就符合对数正态分布,见(8.66)式,即

$$f(s_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma s_t} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln s_t - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{10.86}$$

正像(3.50)式所论证的,若方差$\sigma \gg \ln s_t$,那么s_t就非常接近幂律分布的自相似结构.

乘积过程的另一个例子是社会人群的收入. 设最低收入是m,收入等级由最低收入按λ倍(例如$\lambda=2$)增加,则比最低收入高i级的收入为

$$\lambda^i m = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_i)m, \tag{10.87}$$

其中

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_i = \lambda, \tag{10.88}$$

故收入是一个乘积过程. 通常将收入分成若干类型. 第1类($i=1$)是最低收入:$m\leqslant$收入$\leqslant\lambda m$. 第2类($i=2$):$\lambda m\leqslant$收入$\leqslant\lambda^2 m$. 第i类:$\lambda^{i-1}m\leqslant$收入$\leqslant\lambda^i m$. 一种经济学理论认为,个人收入改变的概率仅仅和收入类型的距离有关,即从第1类变到第3类,和第3类变到第5类的概率是相同的,因为它们都改变了两类.

假设类型由低到高一级的概率是$\frac{1}{3}$,而类型高的变到低一级的概率是$\frac{2}{3}$,这样若时刻t的收入为$x(t)$,那么下一时刻$t+1$的收入为$x(t+1)$. 由于收入减少为$\frac{x(t)}{\lambda}$的概率为$\frac{2}{3}$,收入增加为$\lambda x(t)$的概率为$\frac{1}{3}$,那么$t+1$时刻收入的数学期望为($\lambda=2$)

$$\langle x(t+1)\rangle = \frac{2}{3}\frac{x(t)}{2} + \frac{1}{3}2x(t). \tag{10.89}$$

以第1类、第2类人口数目N_1和N_2来讲,有$\frac{2}{3}$的人停在N_1级,$\frac{2}{3}N_2$的人降为N_1级,有$\frac{1}{3}N_1$的人升为N_2级,有$\frac{2}{3}N_3$的人降为N_2级,故得到

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= \frac{2}{3}N_1(t) + \frac{2}{3}N_2(t), \\ N_2(t+1) &= \frac{1}{3}N_1(t) + \frac{2}{3}N_3(t). \end{aligned} \tag{10.90}$$

若考虑定常状态$N_i(t+1)=N_i(t)$,则由(10.90)第一式,得

$$N_1 = \frac{2}{3}N_1 + \frac{2}{3}N_2,$$

即

$$N_1 = 2\ N_2. \tag{10.91}$$

将(10.91)式代入(10.90)第二式,得到

$$N_2 = \frac{1}{3}(2N_2) + \frac{2}{3}N_3,$$

即

$$N_2 = 2\ N_3. \tag{10.92}$$

因此定常状态下,收入高的人数是下一级收入低的人数的一半,即

$$N_{i+1} = \frac{1}{2}N_i. \tag{10.93}$$

这说明第 i 类收入的人数概率是 $\frac{1}{2^i}$,这样收入从低的 $i=1$ 级到高等级的概率和为

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1. \tag{10.94}$$

同理,从 i 类到高于 i 类人数的概率为

$$\begin{aligned}\sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{2^i}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{i-1}}.\end{aligned} \tag{10.95}$$

因此收入大于 $2^{i-1}m$ 的概率为

$$p(X > 2^{i-1}m) = \frac{1}{2^i}. \tag{10.96}$$

在(10.96)式中设 $x = 2^{i-1}m$,则收入 $X > x$ 的概率为

$$p(X > x) = \frac{m}{x}. \tag{10.97}$$

(10.97)式是典型的幂律(x^{-1})分布. 幂律分布是丰富的自相似分形结构的源泉,因为它代表了从最小尺度到最大尺度间多尺度的特征. 由此可见自相似的乘积过程是形成分形结构的机理.

我们还可以从数论角度来论证自组织的幂律分布. 复杂系统是由许多相互作用的单元构成的,所以微观层次上显示出无序的状态,但是在宏观层次上从临界到自组织或自适应现象中都涌现出很有序的美丽的结构(相变、斑图形式、自组织临界状态等). 同样,数学上的数论也研究许多单元(数)之间的关系. 那么复杂系统理论是否和数论有联系呢?

这里不谈数论本身，只谈两点：

(1) 质数是数论中重要的研究对象. 虽然在整数中提取质数并无明显的规则，但是质数的整体分布却显示出规则性. 例如质数 8703，它左边的第一数字是 8，称为引导数. 质数中引导数 d 服从本福特(Benford)定律

$$p(d)=\lg\left(1+\frac{1}{d}\right), \tag{10.98}$$

其中 $d=1,2,\cdots,9$. 显然，引导数字愈大，它的概率愈小. 引导数字是 1 的概率约为 30.1%，引导数字为 9 的概率约为 4.6%. 图 10.36 显示出 201 个物理常数(黑色)引导数的概率分布以及与本福特定律的比较. 前面谈到幂律分布结构的机理中最主要的是乘积过程，它服从幂率分布

$$p(x)\propto x^{-\alpha}, \quad \alpha\neq 1. \tag{10.99}$$

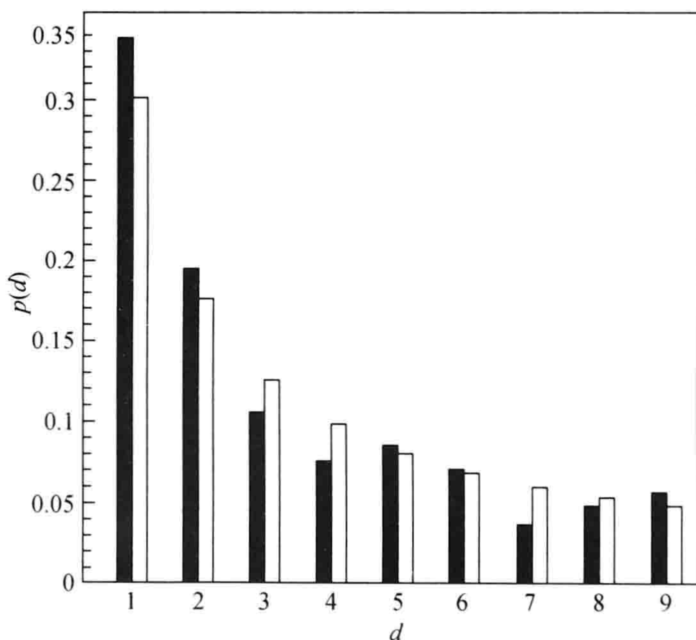


图 10.36 引导数的概率分布

一个随机过程服从幂律分布所产生的数据满足本福特分布，即

$$p(d)=c\int_d^{d+1}x^{-\alpha}\mathrm{d}x=c\,\frac{(d+1)^{-\alpha+1}-d^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}. \tag{10.100}$$

为了归一化，我们取 $c=\dfrac{(-\alpha+1)}{10^{1-\alpha}-1}$，则

$$p(d)=\frac{1}{10^{1-\alpha}-1}\left[(d+1)^{1-\alpha}-(d)^{1-\alpha}\right], \tag{10.101}$$

其中 $\alpha=0$ 是均匀分布. 当 $\alpha=1$ 时，应用洛必达法则，有

$$\frac{(d+1)^{1-\alpha}\ln(d+1)-d^{1-\alpha}\ln d}{10^{1-\alpha}\ln 10}=\frac{\ln\left[\frac{(d+1)}{d}\right]}{\ln 10}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{d}\right)}{\ln 10}. \tag{10.102}$$

(10.102)式称为广义本福特定律,它说明数字间相互作用是杂乱无章的,但是宏观层次上是有规律的. 这样,带有长程相关的幂律分布随机过程和广义的本福特定律联系起来.

(2)根据数论中的定理,当 M 很大时,在整数区间$[1,M]$内质数的平均密度是

$$\frac{1}{\ln M}. \tag{10.103}$$

一个质数不能被任何其他的数整除. 我们取 $M-1$ 个有序整数,$[2,3,4,\cdots,M]$,例如 $M=10^4$,其中 0 和 1 排除,且不重复,假设我们从这 $M-1$ 个整数中抽出 $N(t)$个去形成质数集合,怎么判断它是质数集合呢?我们从剩余的整数中抽出一个整数 a(这相当于不断驱动),若 a 能被 $N(t)$个质数集中的 s 个去除(或被除),那么这 s 个整数就不是质数,将它们退回到原来的整数集中,这样 $t+1$ 时刻的质数集的个数(或尺寸)就是

$$N(t+1)=N(t)+1-s, \tag{10.104}$$

这就是耗散过程,其中 s 是减少的数,相当于沙堆中的崩塌数. 因此从$(M-1)$个整数中每次抽出一个整数相当于沙堆模型中的加沙子,质数所减少的个数相当于沙堆的崩塌数. 这样质数集就自组织围绕着一个平均稳定值$\langle N\rangle$涨落,见图 10.37. 当系统的特征尺度$\frac{M}{\ln M}$增加时,这个平均值$\langle N\rangle$也增加,形成一个标度律

$$\langle N\rangle\propto\left(\frac{M}{\ln M}\right)^{\alpha}, \tag{10.105}$$

且由 $N(t)$可求出功率谱

$$S_N(f)\propto f^{-\beta}, \tag{10.106}$$

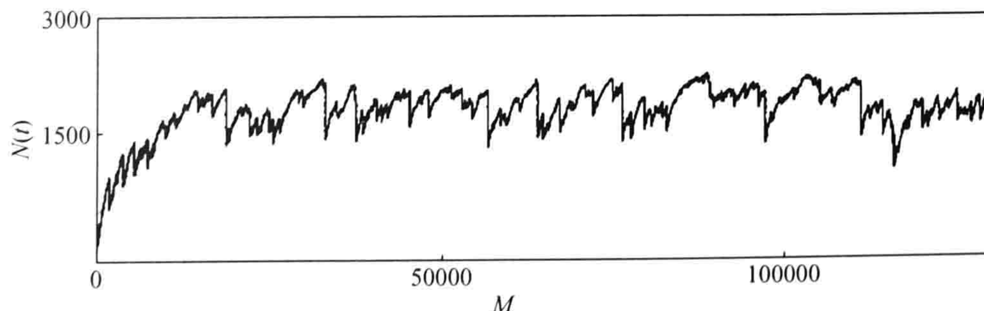


图 10.37 质数集的演化

见图 10.38. 图 10.38 小框内就是功率谱. 这个结果和自组织临界性中的情况相似. 这说明,数论中数与数之间的关系也可能和大小不同尺度之间的关系相联系.

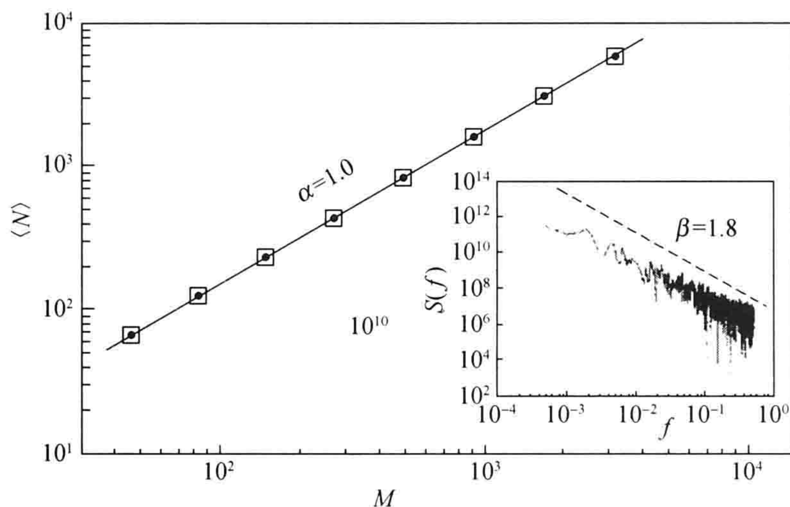


图 10.38 平均值⟨N⟩的标度状态

§ 10.9 熵和结构

本章讨论了反应扩散方程的螺旋斑图结构,自相似螺旋结构以及孤波和层次结构,而谈起"结构"就要说到熵或信息.

从热力学第二定律知道,对于孤立系统,内部的熵 s_i 总是增加的,即

$$\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}t}\geqslant 0. \tag{10.107}$$

玻尔兹曼首先将熵 s 与分布函数联系起来,即

$$s=k\ln\Omega, \tag{10.108}$$

其中 k 是玻尔兹曼常数,Ω 是分子微观状态的数目. 因此熵是无序状态的度量. 典型的例子是原来装在半边盒子中的气体,当中间隔一打开,气体就占满了整个盒子,见图 10.39. 由于占满了整个盒子,气体分子更加杂乱无章地碰撞,熵就增加,因此热分子的平衡态相当于最大无序,熵达到最大.



图 10.39 熵增加的典型例子

但是本章前面谈到的许多结构都是在自然界的开放系统中产生的. 由于与外界环境有物质和能量的交换,整个体系的熵的变化为两项之和:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}_i s}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}_e s}{\mathrm{d}t}, \tag{10.109}$$

其中$\frac{\mathrm{d}_i s}{\mathrm{d}t}$是内部的熵产生，它总是为正的，见(10.107)式．但由于和外界有热交换，有时会造成负熵流，即

$$\frac{\mathrm{d}_e s}{\mathrm{d}t}<0, \tag{10.110}$$

因而整个体系在演化过程中熵也可以减小，微观上分子运动的可能状态受到限制，有大量的分子好像收到命令一样做比较有秩序的运动．例如若下层和上层空气的温度分别是 $T_{下}$ 和 $T_{上}$，而 $T_{下}>T_{上}$，则内部的熵的变化是

$$\frac{\mathrm{d}_i s}{\mathrm{d}t}=\frac{Q}{T_{上}}-\frac{Q}{T_{下}}>0.$$

但是由于和外界有热交换，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}_e s}{\mathrm{d}t}\right|>\frac{\mathrm{d}_i s}{\mathrm{d}t},$$

且

$$\frac{\mathrm{d}_e s}{\mathrm{d}t}<0, \tag{10.111}$$

则说明热对流带走了熵，因此宏观上体系就形成了有序的结构．

小　结

自然现象很多都是自组织发生的，它们都是由许多大大小小不同单元构成的．单元之间的非线性相互作用可以在宏观上产生出很美丽的结构，如螺旋斑图、行波和孤立波斑图等．这些结构的出现是由多尺度系统中各层次间的自相似过程或乘积过程所造成的．从热力学观点看，这是由于和外界有热量交换，使得整个系统的熵减小所致．

第十一章　分数阶导数的物理来源及定义

整数阶导数长期在数学和物理学中占统治地位，这是因为牛顿力学和相应的微积分通常认为空间和时间处处连续可微，基本物理量可以用对时间和空间的整数阶微商表示. 例如速度是位置对时间的一阶微商，加速度是对时间的二阶微商. 又如某空间点上物理量 c 的调和算子（拉普拉斯算子）$\Delta c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$ 代表该点周围的 c 值和该点 c 值之差的平均值，物理上则表示动量或物质（包括温度）交换或扩散的程度. 但是，我们在第二章已经看到，湍流的速度是不可微的，很多事件的发生是断断续续、间歇的，极值事件发生的概率并不太小，这些问题利用传统的物理理论和整数阶微积分是不容易解决的.

§11.1　分数阶导数的物理来源

下面我们举两个例子从物理上说明分数阶导数的来源.

第一个例子是第一章谈到的异常扩散. 当然这里说的“异常”是相对于“正常”的布朗运动引起的扩散而言的.

从第五章我们已经看到，布朗运动中质点游动的概率密度是正态分布

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{11.1}$$

其中 $\sigma=2Kt$. 图 11.1 是正态分布概率密度 p 随 x 的变化图. 从图 11.1 看出，离开平均值一个方差 σ 的面积已占到 68%，离开平均值 2σ 的面积已占 95%，涨落达到 3σ 的概率只占 10^{-7}. 但是，实际上随机游动的下一步并不是和上一步不相关的，也不是每次游动只游动一个间隔距离，有时一步游动的距离比前一步要大出好多量级，因此大的涨落引起大的扩散，扩散方差甚至到 7σ 仍有一定的概率. 详见第五章.

正态分布的概率密度 p 服从福克-普朗克方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=K\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{11.2}$$

若把分子尺度和布朗运动的花粉尺度看成是分离的，则扩散项 $K\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ 是整数阶（二阶）导数. 实际上多尺度系统中的尺度是不能分离的，从而引起了异常扩散.

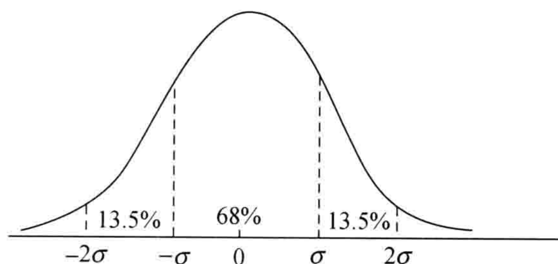


图 11.1 正态分布

为此我们将(12.2)式二阶导数改为 $\alpha(0<\alpha<2)$阶导数,得到

$$\frac{\partial p}{\partial t}=K\frac{\partial^{\alpha} p}{\partial x^{\alpha}}. \tag{11.3}$$

方程(11.3)称为分数阶福克-普朗克方程. 概率密度 p 和特征函数 $\Phi(k)$ 互为傅里叶变换:

$$\Phi(k,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x. \tag{11.4}$$

对(11.3)式两边做傅里叶变换,得到

$$\frac{\partial \Phi(k,t)}{\partial t}=-K|k|^{\alpha}\Phi. \tag{11.5}$$

(11.5)式就是(5.82)式.

(11.5)式是一个特征函数 Φ 的一阶常微分方程,所以它的解是

$$\Phi(k,t)=\mathrm{e}^{-K|k|^{\alpha}t}. \tag{11.6}$$

再将(11.6)式做逆变换,正好就是第五章介绍的列维分布的概率密度分布函数. 它相当于(5.118)式中尺度参量 $\sigma=1$,偏斜度参数 $\beta=0$,移动参数 $\mu=0$. 请注意,正态分布(11.1)式所相应的特征函数是 $\Phi=\mathrm{e}^{-K|k|^{2}t}$,也就是说(11.6)式若取 $\alpha=2$ 就是正态分布.

这个例子说明,将福克-普朗克方程的扩散项的二阶导数改变成 α 的分数阶导数,就可以使正态概率密度分布改变为重尾列维分布,使尺度分离改变为不同尺度间的相互联系. 后者说明对于多尺度现象出现大涨落的概率并不十分小.

第二个例子是天气和气候的关系. 天气一般指每天的天气状况(如温度、降水等). 以北京为例,从 1951 年到 2010 年共 60 年的日气温天气资料,若扣除 60 年的日平均温度,就得到 60 年日气温距平资料. 60 年的资料长度达 20000 多天,所以这个天气资料中最小的时间尺度是天,还有 10^1 天,10^2 天,10^3 天,10^4 天的时间尺度,天气资料跨越 4 个多量级的尺度. 而气候一般认为是天气状况的平均,如月平均、季平均、年平均等,这都是气候. 以月尺度为最小气候时间尺

度，那么 60 年的北京月平均温度距平气候资料就有 10^1 月，10^2 月的气候尺度，气候资料跨越 2～3 个量级，因此天气和气候都是多尺度系统. 天气和气候是什么关系呢？1976 年哈塞尔曼(Hasselmann)将天气和气候的关系比做布朗运动中微观尺度(分子运动)和宏观尺度(花粉运动)之间的关系，认为它们应遵循随机微分方程(称为朗之万方程)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varepsilon, \tag{11.7}$$

其中 ε 是代表天气随机变量，x 代表气候随机变量. (11.7)式左边是整数阶(一阶)微商.

人们怀疑不同尺度的气候资料 x 都是天气资料 ε 的一次积分这一看法.

若气候资料 x 的傅里叶变换为 $\hat{x}$，这两者之间的傅里叶变换对为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ft}\,\mathrm{d}f, \\ \hat{x}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ft}\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{11.8}$$

其中 f 是和时间 t 相对应的频率. 所谓功率谱 $S(f)$ 就是气候信号 $x(t)$ 的傅里叶变换系数 $\hat{x}(f)$ 模的平方，即

$$S(f)=|\hat{x}(f)|^2\propto f^{-\beta}, \tag{11.9}$$

其中 β 称为功率谱指数. 若是按照朗之万方程(11.7)，天气 ε 可以看成白噪声，气候 x 则是布朗(褐色)噪声，那么气候的功率谱只能是 f^{-2}，即功率谱指数 $\beta=2$，而气候资料的自相关函数 $R(\tau)$ 为

$$R(\tau)=\langle[x(t+\tau)-\langle x\rangle][x(t)-\langle x\rangle]\rangle, \tag{11.10}$$

其中 τ 为时间迟后，角括号$\langle\ \rangle$表示总体平均. 功率谱和自相关函数互为傅里叶变换，即

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}f\tau}\,\mathrm{d}f. \tag{11.11}$$

事实上，方程(11.7)就是布朗运动的随机微分方程. 布朗噪声的自相关函数为

$$R(\tau)=\langle x^2\rangle\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T}}. \tag{11.12}$$

(11.11)说明气候的相关是短程相关，这是因为当 $\tau=T$ 时，相关函数已经下降了 $\frac{1}{2.7}$，当 $\tau>T$ 以后相关函数就很快衰减了.

实际的气候并不是这样，它有较强的记忆性. 拿季节气候来说，春夏秋冬，前后次序都记忆得很好. 图 11.2 是根据北京地区 60 年气温资料所做出的月和年的自相关系数 $c(\tau)=\frac{R(\tau)}{\langle x^2\rangle}$. 从图 11.2 看出，气候的自相关函数 $R(\tau)$ 基本上

是一个幂函数形式

$$R(\tau)\propto\tau^{-\gamma}\quad(\gamma>0). \tag{11.13}$$

此时自相关函数的幂函数形式(11.13)相对于指数函数形式(11.12)随着 τ 的增大衰减得慢得多,因此 τ 很大时仍有一定的相关,称为长程相关. 过去统计上习惯于使用自回归模式(ARMA),它实际上认为自相关函数是指数衰减形式,参看图 3.6.

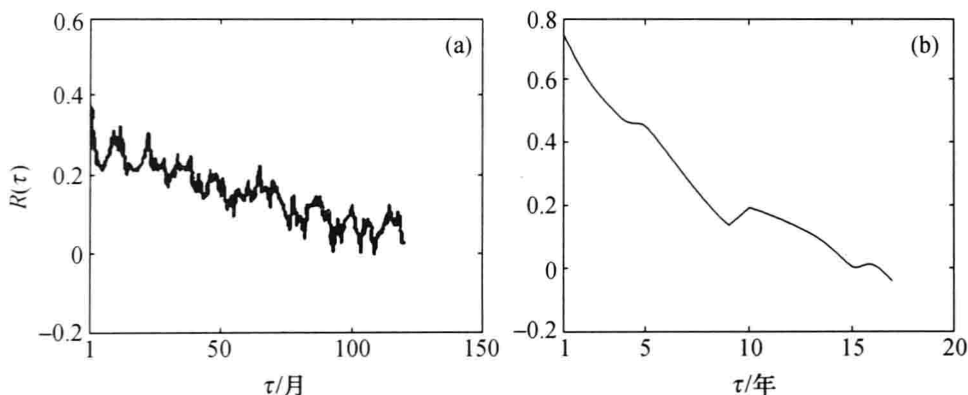


图 11.2　北京气候资料的自相关系数

由于相关函数的量纲是能量,而频率 f 乘上功率谱 $S(f)$ 也是能量,因而两者量纲应相等,得到

$$fS(f)\propto\tau^{-\gamma}=\left(\frac{1}{f}\right)^{-\gamma},$$

即

$$f\cdot f^{-\beta}=f^{\gamma},$$

因此功率谱指数 β 和自相关函数标度指数 γ 之间的关系为

$$\gamma=1-\beta. \tag{11.14}$$

从(11.14)看出,为了保证相关函数以幂函数的衰减,那么功率谱指数必须满足

$$0<\beta<1, \tag{11.15}$$

为此必须把用(11.7)表述的气候随机变量 x 的功率谱指数 β 由 2 降下来,才能保证自相关函数 $R(\tau)$ 是幂函数. 这样我们把(11.7)式中的一阶微商 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,改变为分数阶 α 的微商,得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\varepsilon, \tag{11.16}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}$ 称为分数阶导数.

对傅里叶变换式(11.8)的第一式进行 α 次微商,得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}(f)(\mathrm{i}f)^{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ft}\mathrm{d}f.$$

对 x 进行 α 阶微商的功率谱就为

$$|(\mathrm{i}f)^{\alpha}\hat{x}(f)|^{2}=|f|^{2\alpha}|\hat{x}(f)|^{2}. \tag{11.17}$$

因为若按(11.7)式,气候 x 的功率谱(即布朗运动的功率谱)为

$$|\hat{x}(f)|^{2}\propto f^{-\beta},$$

所以微商 α 次的功率谱指数应为

$$f^{2\alpha}f^{-\beta}=f^{-(\beta-2\alpha)}. \tag{11.18}$$

(11.18)式说明,微商 α 次后的功率谱指数由 β 降为 $\beta-2\alpha$. 因为白噪声的功率谱指数为零,所以

$$\beta-2\alpha=0$$

或

$$\beta=2\alpha. \tag{11.19}$$

由于(11.15)式条件的限制,所以

$$0<\alpha<\frac{1}{2}, \tag{11.20}$$

也就是说由(11.16)看出,微商的阶数小于$\frac{1}{2}$. 方程(11.16)也称为分数阶导数的随机微分方程. 因此,(11.16)式确实能保证其后的自相关函数是幂函数. 在异常扩散微分方程中常用扩散方差

$$\langle x(t)^{2}\rangle=t^{2H} \tag{11.21}$$

来表征扩散的快慢,其中 H 为赫斯特指数. 当 $H=\frac{1}{2}$时就是正常扩散,也称为布朗运动,当 $H\neq\frac{1}{2}$时称为分数维布朗运动.

(11.18)式说明,变量 x 经过 α 阶微商以后,原先的功率谱指数由 β 降低为 $\beta-2\alpha$. 也可以反过来说,(11.16)式中 ε 积分 α 次就是 x,记为$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}\varepsilon}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}$,称为分数阶积分. 功率谱指数由 0 增加到 2α,即 x 的功率谱为 $f^{(-2\alpha)}$.

H 和 γ 的关系已经在(5.55)式求得,即

$$2H=2-\gamma \quad (0<\gamma<1) \tag{11.22}$$

或

$$H=1-\frac{\gamma}{2}. \tag{11.23}$$

从(12.23)式看出,当$\frac{1}{2}<H<1$,因而(11.20)式中 $2H>1$ 时,随机游动是持续

的,更喜欢保持运动方向而不是改变方向,因此扩散快于正常扩散. 而 $0<H<\frac{1}{2}$ 则意味着随机游动是反持续的,更喜欢改变方向,而不是持续在一个方向,所以扩散慢于正常扩散. $H=\frac{1}{2}$ 时的布朗运动详见第五章.

第一个例子说明,将空间二阶导数 $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ 改变成 $\frac{\partial^\alpha p}{\partial x^\alpha}$ $(0<\alpha<2)$ 可使正态分布变成重尾列维分布,将正常扩散变成异常扩散. 第二个例子说明,将时间一阶导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 改变为 $\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ 可以将短程相关改变成长程相关,说明气候具有长期记忆性.

下面看第三个例子. 过去黏性介质中常用到的应力 $\tau(t)$ 和应变 $\sigma(t)$ 之间的关系为

$$\eta \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=\tau(t), \tag{11.24}$$

其中 η 是物质的黏性系数. (11.24)式称为牛顿定律. 而对于弹性介质,应力和应变的关系则服从胡克定律

$$E\sigma=\tau,$$

或写成

$$E\frac{\mathrm{d}^0\sigma}{\mathrm{d}t^0}=\tau(t), \tag{11.25}$$

其中 E 是弹性模量,导数符号上写"0"表示 0 阶导数,也就是不求导. 若设应变 σ 随时间的变化是 $\sigma(t)=t, 0\leqslant t\leqslant T$,那么应力 τ 由(11.24)和(11.25)式就为

$$\tau=\begin{cases}\eta\times\text{常数}, & \text{对黏性液体},\\ Et, & \text{对弹性固体},\end{cases}$$

或比值

$$\frac{\tau(t)}{\sigma(t)}t^\alpha=\begin{cases}\eta, & \text{对于 }\alpha=1\text{ 的黏性液体},\\ E, & \text{对 }\alpha=0\text{ 的弹性固体}.\end{cases} \tag{11.26}$$

黏弹性介质处在弹性固体和黏性液体之间,

$$0<\alpha<1. \tag{11.27}$$

这样对黏弹性介质,除了 E(或 η)这个介质常数外,还多了一个介质常数 α. 这个 α 就是黏弹性介质关系

$$\nu\frac{\mathrm{d}^\alpha\sigma}{\mathrm{d}t^\alpha}=\tau \tag{11.28}$$

中的分维阶导数的阶数,ν 是介质常数. 对胡克定律,$\alpha=0, \nu=E$;对牛顿定律,$\alpha=1, \nu=\eta$. 这个例子说明,介于弹性和黏性之间的黏弹性介质的应力应变间的关系也要引进分数阶导数.

§11.2　常数的分数阶导数不为零，分数阶导数为零的函数是幂函数

由于我们长期在物理学中使用整数阶的导数，因而对其比较熟悉. 在谈分数阶导数定义前，最简单的方法是将简单函数的整数阶导数自然延伸到分数阶导数.

举一个例子. 对 t^m 求整数 n $(n<m)$ 阶导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}^n(t^m)}{\mathrm{d}t^n}=m(m-1)\cdots(m-n+1)t^{m-n}$$

$$=\frac{m!}{(m-n)!}t^{m-n}. \tag{11.29}$$

(11.29)式右端的系数可以用 Γ 函数表示：

$$\frac{m!}{(m-n)!}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}.$$

这样，对函数 t^p 的 α 阶(α 是非整数)导数就可以写做

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha(t^p)}{\mathrm{d}t^\alpha}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}t^{p-\alpha}, \tag{11.30}$$

其中 $p+1\neq 0,-1,-2,\cdots,-n$.

利用(11.30)式的结果，我们可以求莱布尼茨(Leibniz)在 1695 年提出的求 $\frac{1}{2}$阶导数的问题. 在(11.30)式中取 $\alpha=\frac{1}{2}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}(t^p)}{\mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)}t^{p-\frac{1}{2}}.$$

特别在 $p=1$ 时，从(11.30)式得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}t}{\mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}t^{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

当 $p=-\frac{1}{2}$时，得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}t^{-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-1)}t^{-1}=0. \tag{11.31}$$

(11.31)式就是近 300 年前莱布尼茨的结果.

由(11.30)式还可以导出两个重要的结果.

第一个结果，常数的分数阶导数不为零. 在(11.30)式中取 $p=0$，那么

$t^0=1$,则按(11.30)式,得

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha t^0}{\mathrm{d}t^\alpha}=\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-\alpha)}t^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}. \tag{11.32}$$

在整数阶导数中,若函数 $f(t)$ 是常数,那么它的任何整数阶 $n(n>0)$ 的导数都为零,物理上表示函数 $f(t)$ 所代表的物理量不随时间变化,但是常数的分数 α(非整数)阶导数当 $t\to0$ 时是发散的. 应该指出,按照卡普托(Caputo)分数阶导数的定义,常数的 α 阶导数仍为零. 不同人定义的分数阶导数结果不同,这仍是有待解决的问题.

从(11.32)式看出,当 α 是大于零的整数时,$(1-\alpha)$ 就是从零开始的负整数,那么 $\Gamma(1-\alpha)=\infty$,因而 $\frac{\mathrm{d}^\alpha c}{\mathrm{d}x^\alpha}$($\alpha$ 为大于零的整数)才为零,这就是通常说的常数的导数是零. 但是当 α 是分数时,常数 c 的 α 阶导数是一个和 $\frac{1}{t^\alpha}$ 成正比的函数,它是一个幂函数 $t^{-\alpha}$.

从物理上讲,若 t 理解成离临界点的距离,那么 $\frac{\mathrm{d}^\alpha c}{\mathrm{d}x^\alpha}$ 就可以理解成弛豫时间,离临界点愈近,弛豫时间愈长,甚至于趋向于无穷大,这就使所谓“临界慢化”现象. 对照列维分布和(11.13)式的幂函数自相关函数,常数 c 的分数阶导数有幂函数 $t^{-\alpha}$ 的形式就更不足为奇了.

第二个结果,幂函数的分数阶导数为零. 过去,在动力系统理论中,相空间的体积 v 的一阶导数为零,即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \tag{11.33}$$

就表示是守恒系统. 若 v 代表其他物理量,则表示该物理量在运动中守恒. 如 v 代表速度,则代表速度是运动守恒的,若 v 代表熵(或位温)则表示绝热过程中熵或位温保持不变.

在分数阶导数中,函数 $f(t)$ 的 α 阶导数为零,即

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha f}{\mathrm{d}t^\alpha}=0 \tag{11.34}$$

代表什么含义呢? 事实上,(11.34)式中的解就是幂函数

$$f(t)=At^{\alpha-1}, \tag{11.35}$$

其中 A 是常数.

我们来证明这一点. 按(11.30)式,t^{b-1} 的 α 阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha(t^{b-1})}{\mathrm{d}t^\alpha}=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-\alpha)}t^{b-1-\alpha}, \tag{11.36}$$

因此当 $b\to\alpha$ 时,$\Gamma(b-\alpha)\to\Gamma(0)\to\infty$,(11.36)式的右端趋于零. 故(11.36)式中

b 取为 α，即可使(11.34)式成立．因而(11.35)式是方程(11.33)的解．

同理，$t^{\alpha-k}(k=1,2,\cdots)$ 的 α 阶导数也是零．

从这里可以明显看出幂函数 $t^{\alpha-1}$ 在分数阶微积分中的重要性．若 $0<\alpha<1$，(11.35)式就表示随时间 t 的增大，$f(t)$是衰减的．α 起着一种标度指数的作用．

在整数阶微分中，导数为零表示物理学中的守恒量，而在多尺度的分数阶微分中，导数为零表示存在自相似的结构，即幂函数．多尺度分形物理学重点研究标度不变性或标度指数．

另外，指数函数

$$f(t)=k\mathrm{e}^{kt} \tag{11.37}$$

的整数 n 阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^n(\mathrm{e}^{kt})}{\mathrm{d}t^n}=k^n\mathrm{e}^{kt}, \tag{11.38}$$

即指数函数的整数阶导数仍是指数函数．我们将(11.38)式中的整数 n 扩展到实数 α，得到

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha(\mathrm{e}^{kt})}{\mathrm{d}t^\alpha}=k^\alpha\mathrm{e}^{kt}\quad(k\geqslant 0). \tag{11.39}$$

§11.3　将整数阶导数扩展到分数阶导数的定义

很多书中常见到的分数阶导数采用了称为黎曼-刘维尔公式的表达式．这节我们将说明这个表达式的自然性．

若 $f(x)$是 x 的函数，那么当 n 为整数时，f 的 n 阶导数可表示为差分形式

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x-kh), \tag{11.40}$$

其中

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{11.41}$$

是二项式展开的系数，h 是差分的格距．例如 $n=1$ 时的一阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \tag{11.42}$$

$n=2$ 时的二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}, \tag{11.43}$$

其他整数阶导数类似．

α 是分数时，则可将(11.40)式中的 n 推广到实数 α，α 阶的分数阶导数可表

达为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f}{\mathrm{d}x^{\alpha}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{\substack{k=0\\ x-a=nh}}^{n}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}f(x-kh),\tag{11.44}$$

其中

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha!}{k!\ (\alpha-k)!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}\tag{11.45}$$

且 a 到 x 区间分成 n 个格距为 h 的小区间.

(11.44)式中

$$(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha-k-1}{k}=\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)},\tag{11.46}$$

这样(11.44)式又可表示成

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f}{\mathrm{d}x^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-a}{n}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)}f\left(x-k\,\frac{x-a}{n}\right).\tag{11.47}$$

因此从定义上看,分数阶导数和整数阶导数形式上相同.

下面举例来说明.

指数函数 e^{x} 常可以用级数表示:

$$\mathrm{e}^{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)}x^{k}.\tag{11.48}$$

若对 e^{x} 求整数 n 阶导数,可得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}(\mathrm{e}^{x})&=\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k}\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{k!}x^{k-n}\\&=\sum_{k-n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1-n)}x^{k-n}.\end{aligned}\tag{11.49}$$

令 $k-n=k'$,则(11.49)式变成

$$\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}(\mathrm{e}^{x})=\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k'+1)}x^{k'}=\mathrm{e}^{x}.\tag{11.50}$$

将(11.49)式扩展到分数 α 阶导数,利用(11.30)式,得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}(\mathrm{e}^{x})}{\mathrm{d}x^{\alpha}}=\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}=\mathrm{e}_{\alpha}^{x}.\tag{11.51}$$

e_{α}^{x} 称为广义的指数函数.

黎曼-刘维尔的分数阶导数的定义是从分数阶积分开始的.

若将(11.44)式中的 α 改为 $-\alpha$,则由于

$$\binom{-\alpha}{k}=\frac{-\alpha(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}=(-1)^k\binom{\alpha}{k},\tag{11.52}$$

那么(11.44)式就变成

$$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}f}{\mathrm{d}\,x^{-\alpha}}=\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}f(x-kh),\tag{11.53}$$

其中$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}f}{\mathrm{d}x^{-\alpha}}$代表 f 的分数 α 阶积分. 例如,当 $\alpha=1$ 时,$\binom{1}{k}=\frac{k!}{k!}=1$,则

$$\frac{\mathrm{d}^{-1}f}{\mathrm{d}x^{-1}}=h\sum_{k=0}^{n}f(f-kh).$$

若上式中我们令 $x-a=nh,y=kh$,则当 $h\to0$ 时该式就变成积分

$$\frac{\mathrm{d}^{-1}f}{\mathrm{d}x^{-1}}=\int_0^{x-a}f(x-y)\mathrm{d}y.$$

再令 $x-y=z$,有

$$\frac{\mathrm{d}^{-1}f}{\mathrm{d}x^{-1}}=\int_a^x f(z)\mathrm{d}z.\tag{11.54}$$

(11.54)式就代表 f 对 x 的一次积分. 又如,当 $\alpha=2$ 时,由于

$$\binom{2}{k}=\frac{2\times3\times\cdots\times(2+k-1)}{k!}=k+1,\tag{11.55}$$

所以 $h\to0$ 时,(11.53)式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{-2}f}{\mathrm{d}x^{-2}}&=h^2\sum_{k=0}^{n}(k+1)f(x-kh)\\&=h\sum_{k=0}^{n}(kh)f(x-kh).\end{aligned}\tag{11.56}$$

令 $x=t-h$,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{-2}f(t-h)}{\mathrm{d}(t-h)^{-2}}&=h\sum_{k=0}^{n}(kh)f(t-h-kh)\\&=h\sum_{k=0}^{n}(kh)f(t-(k+1)h)\\&=h\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)hf(t-kh)\\&=h\sum_{k=1}^{n+1}(kh)f(t-kh)-h\sum_{k=1}^{n+1}hf(t-kh).\end{aligned}\tag{11.57}$$

令 $h\to0$,则

$$\frac{\mathrm{d}^{-2}f(x)}{\mathrm{d}x^{-2}}=h\sum_{k=1}^{n+1}(kh)f(x-kh).$$

令 $kh=y,z=x-y$，则

$$\frac{\mathrm{d}^{-2}f(x)}{\mathrm{d}x^{-2}}=\int_0^{x-a}yf(x-y)\mathrm{d}x=\int_a^x(x-z)f(z)\mathrm{d}z. \tag{11.58}$$

当 $\alpha=3$ 时，类似地有

$$\frac{\mathrm{d}^{-3}f(x)}{\mathrm{d}x^{3}}=\frac{1}{2!}\int_a^x(x-z)^2f(z)\mathrm{d}z.$$

这是因为

$$\binom{3}{k}=\frac{3\times4\times\cdots\times(3+k-1)}{k!}=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

由此有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{-3}f}{\mathrm{d}x^{-3}}&=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)h^2f(x-kh)\\&=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n+1}(kh)^2f(x-kh)+\frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^{n+1}khf(x-kh),\end{aligned}$$

在 $h\to0$ 时，令 $y=(k-1)h,t-y=z$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{-3}f}{\mathrm{d}x^{-3}}&=\frac{1}{2!}\int_0^{x-a}y^2f(x-y)\mathrm{d}y+\frac{h^2}{2}\int_0^{x-a}yf(x-y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2!}\int_a^x(x-y)^2f(z)\mathrm{d}z+\frac{h}{2}\int_a^x(x-y)f(z)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2!}\int_a^x(x-z)^2f(z)\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{11.59}$$

同样将 α 取成分数，所有阶乘全换成 Γ 函数，则 α 阶积分有

$$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}f(x)}{\mathrm{d}x^{-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-z)^{\alpha-1}f(z)\mathrm{d}z. \tag{11.60}$$

(11.60)式就是常见的黎曼-刘维尔分数 α 阶积分的定义. 表达式(11.60)是从差分的定义自然导得的，这就解释了本节开始提到的这一定义的自然性. 这样 $f(x)$ 的 α 阶分数阶导数就通过上面的积分定义表达为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(x)}{\mathrm{d}x^{\alpha}}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{\mathrm{d}^{-(n-\alpha)}f(x)}{\mathrm{d}x^{-(n-\alpha)}}\right]. \tag{11.61}$$

这里 $\alpha-n<0$ 且 $\alpha-n+1>0$，因此一般地有 $n=[\alpha]+1$，$[\alpha]$为数 α 的整数部分. (11.61)式意味着先求分数阶积分，然后再求整数 n 阶导数，但是卡普托却是在(11.61)式中先求整数阶导数后求分数阶积分，当然导致了不同的结果. 例如，若 $f(x)$是常数，那么先求一阶导数为零，因此卡普托的结果是常数的分数阶导数是零，和(11.32)式结果完全不同.

下面举几个例子.

第一个例子，x^p的α阶导数. 按(11.60)式的定义，

$$\frac{d^\alpha x^p}{dx^\alpha}=\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x(x-z)^{(n-\alpha-1)}z^p dz\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x(x-z)^{(n-\alpha-1)}z^p dz. \tag{11.62}$$

(11.62)式积分号中的

$$(x-z)^{n-\alpha-1}z^p=\left[x\left(1-\frac{z}{x}\right)\right]^{n-\alpha-1}z^p$$

$$=x^{n-\alpha-1}\left(1-\frac{z}{x}\right)^{n-\alpha-1}z^p$$

$$=x^{n-\alpha+p}\left(1-\frac{z}{x}\right)^{n-\alpha-1}\left(\frac{z}{x}\right)^p\frac{1}{x}. \tag{11.63}$$

这样(11.62)式就变成

$$\frac{d^\alpha x^p}{dx^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-\alpha+p}\int_0^1\left(1-\frac{z}{x}\right)^{n-\alpha-1}\left(\frac{z}{x}\right)^p d\left(\frac{z}{x}\right)\right]. \tag{11.64}$$

利用B函数表达式

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{11.65}$$

以及整数阶导数(11.29)式的结果

$$\frac{d^n}{dx^n}x^p=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}x^{p-n}=p(p-1)\cdots(p-n+1)x^{p-n}, \tag{11.66}$$

(11.64)式可写为

$$\frac{d^\alpha x^p}{dx^n}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n-\alpha+p}$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)}x^{p-\alpha}\frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(n-\alpha+p-n+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}x^{p-\alpha}$$

$$=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-\alpha)}x^{p-\alpha}. \tag{11.67}$$

(11.67)式的结果与x^p的α阶微商的结果(11.30)式完全一致.

第二个例子，$f(x)=\ln x$的α阶导数. 为此先求出(11.60)式中的积分

$$\frac{d^{-\alpha}f(x)}{dx^{-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-z)^{\alpha-1}\ln z dz. \tag{11.68}$$

把积分变量 z 换成 u，即

$$z=x(1-u), \tag{11.69}$$

则(11.68)式变成

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}f(x)}{\mathrm{d}x^{-\alpha}} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}u^{\alpha-1}[\ln x+\ln(1-u)]x\mathrm{d}u \\
&= \frac{x^{\alpha}(\ln x)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}\mathrm{d}u+\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}\ln(1-u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{x^{\alpha}(\ln x)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\alpha}-\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \ln(1-u)\mathrm{d}(1-u^{\alpha}) \\
&= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ln x-\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\alpha}\left[(1-u^{\alpha})\ln(1-u)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1-u^{\alpha}}{1-u}\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ln x-\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\alpha}\int_0^1\frac{1-u^{\alpha}}{1-u}\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{11.70}$$

由 Γ 函数的对数微商，即双 Γ 函数 Ψ，有

$$\Psi(y+1)=\int_0^1\frac{1-u^{y}}{1-u}\mathrm{d}u+c,$$

则

$$\int_0^1\frac{u^{x}-u^{y}}{1-u}\mathrm{d}u=\Psi(y+1)-\Psi(x+1). \tag{11.71}$$

代入(11.70)式，得

$$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}f(x)}{\mathrm{d}x^{-\alpha}}=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln x+\Psi(1)-\Psi(\alpha+1)]. \tag{11.72}$$

按(11.61)式，$f(x)=\ln x$ 的 α 阶导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{\alpha}(\ln x)}{\mathrm{d}x^{\alpha}} &= \frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\left[\frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}(\ln x+\Psi(1)-\Psi(n-\alpha+1))\right] \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}(\ln x-\Psi(1-\alpha)+\Psi(1)).
\end{aligned} \tag{11.73}$$

利用公式

$$\Psi(1+x)=\Psi(x)+\frac{1}{x} \tag{11.74}$$

和

$$\Gamma(1-\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha},$$

并在(11.74)式中取 $x=1-\alpha$，得到

$$\Psi(2-\alpha)=\Psi(1-\alpha)+\frac{1}{1-\alpha},$$

则(11.73)成为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}(\ln x)}{\mathrm{d}x^{\alpha}}=\frac{x^{-\alpha}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left[\ln x-\Psi(2-\alpha)+\frac{1}{1-\alpha}+\Psi(1)\right]. \tag{11.75}$$

(11.75)式就是 $\ln x$ 的 α 阶导数表达式. 当 $\alpha=1$ 时,(11.75)式成为

$$\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x}=\frac{x^{-\alpha}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\ln x+\frac{x^{-\alpha}(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)}=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

这就是通常用到的对数函数的一阶导数.

§11.4 分数阶导数的傅里叶和拉普拉斯变换

由于近年来很多物理问题均要用到分数阶导数的微分方程,为此我们将把整数阶导数的傅里叶和拉普拉斯变换推广到分数阶导数上去.

通常函数 $f(x)$或 $f(t)$ 的傅里叶变换定义为

$$F(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x. \tag{11.76}$$

(11.76)式是物理空间 x 和波数 k 空间互换. 拉普拉斯变换定义为

$$L(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{11.77}$$

(11.77)式是时间 t 和频率 s 互换.

n 阶(整数)导数$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$或 $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}$的傅里叶变换为

$$F\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{i}k)^n F(k), \tag{11.78}$$

其中 $F(k)$是 f 的傅里叶变换. 当 n 由整数推广到分数 α 时,最常用的公式是

$$F\left(\frac{\mathrm{d}^{\alpha} f}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\right)=-\,|k|^{\alpha}\exp\left(i(\mathrm{sign}k)\frac{\beta\pi}{2}\right)F(k)\quad(0<\alpha<2), \tag{11.79}$$

其中 β 是偏斜度参数. 对称时常取 $\beta=1$,则(11.79)式化为

$$F\left(\frac{\mathrm{d}^{\alpha} f}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\right)=-\,|k|^{\alpha}F(k). \tag{11.80}$$

n 阶导数的拉普拉斯变换常有两种表达式:

$$\begin{aligned}L\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}\right)&=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=s^n L(f)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-s^0 f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

$$= s^n L(f) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \tag{11.81}$$

和

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}\right) = s^n L(f) - s^0 f^{(n-1)}(0) - s' f^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1} f(0)$$

$$= s^n L(f) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \tag{11.82}$$

(11.81)式右端前几项含有低阶导数的初值 $f(0), f'(0), f''(0)$，因而物理意义清楚.

将(11.81)，(11.82)式的 n 推广到分数 α 时也有两种表达式：

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha f}{\mathrm{d}t^\alpha}\right) &= s^\alpha L(f) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha < n, \\ L\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha f}{\mathrm{d}t^\alpha}\right) &= s^\alpha L(f) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0), \quad n-1 < \alpha < n. \end{aligned} \tag{11.83}$$

特别地，当 $0<\alpha<1$(即 $n=1$)时，(11.83)的两个表达式分别为

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha f}{\mathrm{d}t^\alpha}\right) = s^\alpha L(f) - s^{\alpha-1} f(0) \tag{11.84}$$

和

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha f}{\mathrm{d}t^\alpha}\right) = s^\alpha L(f) - s^0 f^{(\alpha-1)}(0). \tag{11.85}$$

(11.84)式只要知道 f 的初值 $f(0)$，而(11.85)式则要知道 $f^{(\alpha-1)}$ 阶导数的初值.

我们利用这些结果，举三个例子.

第一个例子. 考虑分数阶福克-普朗克方程(11.3)式. 对其两边做傅里叶变换并利用(11.80)式，得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -K|k|^\alpha \Phi. \tag{11.86}$$

(11.86)式就是(11.5)式. (11.86)式是 Φ 的常微分方程，其解为

$$\Phi = \mathrm{e}^{-K|k|^\alpha t}, \tag{11.87}$$

即(11.6)式.

第二个例子. 考虑方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}} f}{\mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{e}^t, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^{-\frac{1}{2}} f}{\mathrm{d}t^{-\frac{1}{2}}}\right|_{t=0} = 1. \end{cases} \tag{11.88}$$

对于(11.88)式两边进行拉普拉斯变换，

$$s^{\frac{1}{2}}L(f)-\left.\frac{\mathrm{d}^{-\frac{1}{2}}f}{\mathrm{d}t^{-\frac{1}{2}}}\right|_{t=0}=\frac{1}{s-1}, \tag{11.89}$$

其中 $L(\mathrm{e}^t)=\frac{1}{s-1}$. 由(11.89)式,得

$$s^{\frac{1}{2}}L(f)-1=\frac{1}{s-1},$$

$$s^{\frac{1}{2}}L(f)=\frac{1}{s-1}+1=\frac{s}{s-1},$$

因此

$$L(f)=\frac{s^{\frac{1}{2}}}{s-1}. \tag{11.90}$$

对(11.90)的右端作逆变换,就得到

$$f=L^{-1}\left(\frac{s^{\frac{1}{2}}}{s-1}\right)=\mathrm{E}_{\frac{1}{2}}(t), \tag{11.91}$$

其中 $\mathrm{E}_{\frac{1}{2}}(t)$为单参数米塔-列夫勒函数,将在下节详细介绍.

第三个例子. 在异常扩散中常用到如下方程

$$\frac{\partial^\beta \Phi}{\partial t^\beta}=-A|k|^\alpha\Phi,\quad 0<\beta<1. \tag{11.92}$$

把上式两边做拉普拉斯变换,有

$$s^\beta L(\Phi)-s^{\beta-1}\Phi(0)=-A|k|^\alpha L(\Phi),$$

因此

$$L(\Phi)=\frac{s^{\beta-1}\Phi(0)}{A|k|^\alpha+s^\beta}=s^{-1}\frac{1}{A|k|^\alpha s^{-\beta}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-A|k|^\alpha)^n s^{-\beta n-1}.$$

对上面级数中每一项求逆变换并用结果 $L\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)=s^{-\alpha}$,得到

$$\Phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\beta n+1)}(-A|k|^\alpha t^\beta)=\mathrm{E}_\beta(-A|k|^\alpha t^\beta), \tag{11.93}$$

其中 E_β也是米塔-列夫勒函数. 当 $\beta=1$ 时,$\mathrm{E}_1=\mathrm{e}^{-A|k|^\alpha t}$,就是(11.87)式的结果.

§11.5　和分数阶导数有关的几个新的函数

这一节我们要介绍几个和分数阶导数有关的特殊函数.

(1) 米塔-列夫勒函数.

将指数函数(11.48)推广到含有非整数阶的 α,有

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} x^k \quad (\alpha > 0). \tag{11.94}$$

显然,当 $\alpha=1$ 时 $E_1(x)=e^x$. 这个函数就称为单参数的米塔-列夫勒函数,简称 M-L 函数. 上节(11.91)式得到的

$$E_{\frac{1}{2}}(x)=e^{x^2}\operatorname{erfc}(-x),$$

其中

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-p^2}\,dp$$

是误差函数

为了说明米塔-列夫勒函数的意义,我们将指数函数 e^{-t^α},幂函数 $t^{-\alpha}$ 和取 $\alpha=0.6$ 的米塔-列夫勒函数画在图 11.3 上. 从图上看出,在 $t\to 0$ 时,E_α 接近于指数函数,而当 $t\to\infty$ 时,E_α 接近于幂函数. 对许多复杂的物理现象,指数衰减是暂态过程,而经过很长时间以后,就接近于前面论述过的长程相关的慢弛豫过程.

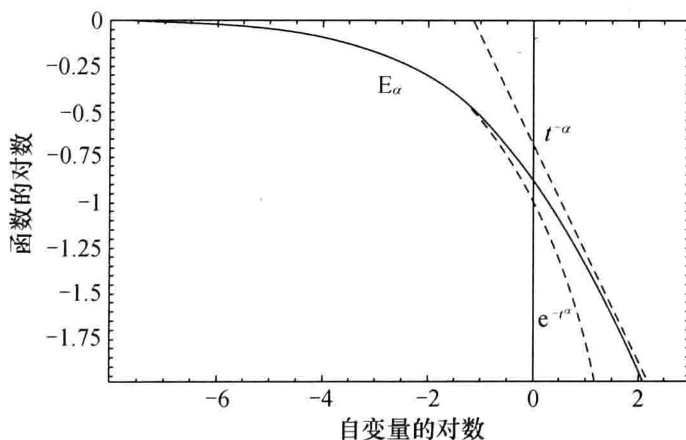


图 11.3 米塔-列夫勒函数和指数函数 e^{-t^α} 以及幂函数 $t^{-\alpha}$ 的比较

在(11.94)式中令 $x=t^\alpha$,米塔-列夫勒函数也可以表示为

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}.$$

米塔-列夫勒函数在分数阶微积分中的重要性就相当于指数函数在整数阶微积分中的重要性.

有时还会用到两个参数的米塔-列夫勒函数

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{11.95}$$

显然它在 $\beta=1$ 时就是单参数米塔-列夫勒函数(11.94)式,例如

$$\mathrm{E}_{1,1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x. \tag{11.96}$$

下面列出几个米塔-列夫勒函数的拉普拉斯变换结果:

$$\begin{aligned}&L(\mathrm{E}_\alpha(\lambda t^\alpha))=\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda},\\&L(t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha))=\frac{1}{s^\alpha+\lambda},\\&L(t^{\beta-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha))=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}.\end{aligned} \tag{11.97}$$

(2) 广义指数函数.

广义指数函数的定义见(11.51)式. 广义指数函数有什么特点呢? 大家知道对数函数的相对变化率为常数,

$$\frac{\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\lambda t})}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{e}^{\lambda t}}=\frac{\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}}{\mathrm{e}^{\lambda t}}=\lambda, \tag{11.98}$$

但是对于广义指数函数 e_α^t,它的相对变率却不是这样.

现在求广义指数函数 $\mathrm{e}_\alpha^{\lambda t}$ 的一阶导数:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}_\alpha^{\lambda t})}{\mathrm{d}t}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}(t^{k-\alpha})}{\mathrm{d}t}\\&=(\lambda t)^{-\alpha}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{\Gamma(k+1-\alpha-1)}\\&=\lambda\mathrm{e}_{\alpha+1}^{\lambda t}.\end{aligned} \tag{11.99}$$

而对 $\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$ 求 $(\alpha-1)$ 阶导数,得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}(\lambda\mathrm{e}^{\lambda t})}{\mathrm{d}t^{\alpha-1}}&=\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}^{-1}}{\mathrm{d}t^{-1}}(\lambda\mathrm{e}^{\lambda t})\right)\\&=\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}\left(\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1).\end{aligned} \tag{11.100}$$

(11.100)式的左边由(11.51)式有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}}{\mathrm{d}t^{\alpha-1}}(\lambda\mathrm{e}^{\lambda t})&=\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}}{\mathrm{d}t^{\alpha-1}}\left(\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}t^{(k-\alpha+1)}}{\Gamma(k+1-\alpha+1)}\\&=\lambda^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k+1-\alpha+1)}\\&=\lambda^\alpha\mathrm{e}_{\alpha-1}^{\lambda t}.\end{aligned} \tag{11.101}$$

利用(11.32)式,(11.100)式为

$$\lambda^{\alpha}\mathrm{e}_{\alpha-1}^{\lambda t}=\lambda^{\alpha}\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda t}-\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{11.102}$$

将(11.102)式两边对 t 求一次导数,得

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}_{\alpha-1}^{\lambda t})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda t})}{\mathrm{d}t}+\frac{\lambda\alpha}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda t)^{\alpha+1}}. \tag{11.103}$$

由(11.99)式,(11.103)式中的

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}_{\alpha-1}^{\lambda t})}{\mathrm{d}t}=\lambda\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda t}. \tag{11.104}$$

这样求得广义指数函数的相对变化率为

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda t})}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda t}}=\lambda-\frac{\lambda\alpha}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda t)^{\alpha+1}\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda t}}. \tag{11.105}$$

将(11.98)和(11.105)式比较看出,对广义指数函数,相对变化率不是常数,而是多出一项. 该项随 t 增加而减小,且当 $t\to0$ 时,该项趋向无穷大. 和常数的分数阶导数(11.32)式类似,式中多出的是一个 t 的负幂次方的幂函数.

(3) 广义三角函数.

有了广义指数函数(11.99),我们就可以定义广义三角函数. 广义余弦函数为

$$\cos_{\alpha}t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}_{\alpha}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}_{\alpha}^{-\mathrm{i}t}), \tag{11.106}$$

广义正弦函数为

$$\sin_{\alpha}t=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}_{\alpha}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}_{\alpha}^{-\mathrm{i}t}), \tag{11.107}$$

其中 $\mathrm{e}_{\alpha}^{\mathrm{i}t}$ 满足欧拉关系的推广,即

$$\mathrm{e}_{\alpha}^{\mathrm{i}t}=\cos_{\alpha}t+\mathrm{i}\sin_{\alpha}t. \tag{11.108}$$

将(11.99)式的级数表达式代入(11.106),(11.107)式,得到

$$\cos_{\alpha}t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-\alpha}\cos\dfrac{(k-\alpha)\pi}{2}}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \tag{11.109}$$

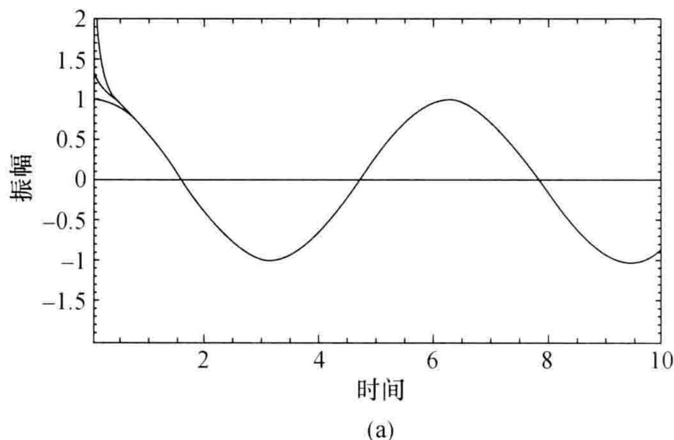
$$\sin_{\alpha}t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-\alpha}\sin\dfrac{(k-\alpha)\pi}{2}}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \tag{11.110}$$

其中利用了欧拉关系

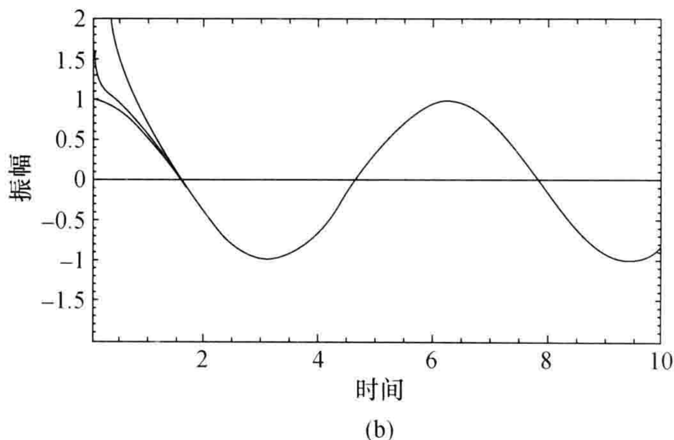
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta. \tag{11.111}$$

图 11.4 是 $\cos_{\alpha}t$ 的图像. 图 11.4(a)取 $\alpha=0$,$\alpha=0.1$ 和 $\alpha=0.5$,图 11.4(b)取 $\alpha=0$,$\alpha=1.1$ 和 $\alpha=1.5$. 从图 11.4 看出,广义 $\cos_{\alpha}t$ 函数图像和通常的余弦

$\cos_0 t$ 函数图像差别仅仅在原点附近，而且当 α 为非整数时，若 $t \to 0$ 则 $\cos_\alpha t \to \infty$.



(a)



(b)

图 11.4 $\cos_\alpha t$ 图

(a) $\alpha=0, \alpha=0.1, \alpha=0.5$；(b) $\alpha=0, \alpha=1.1$ 和 $\alpha=1.5$

图 11.5 是广义 $\sin_\alpha t$ 的图像. 图 11.5(a)取 $\alpha=0, 0.1$ 和 0.5，图 11.5(b)取 $\alpha=0, \alpha=1.1$ 和 $\alpha=1.5$. 从图 11.5 看出，和普通的 $\sin_0 t=\sin t$ 的差别主要还是在原点附近. 同样，对非整数 α，当 $t\to 0$ 时 $\sin_\alpha t \to \infty$.

对 $\cos_\alpha t$ 求一阶导数，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\cos_\alpha t)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-\alpha)t^{k-\alpha-1}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \cos \frac{(k-\alpha)\pi}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-\alpha-1}}{\Gamma(k-\alpha)} \cos \frac{(k-\alpha)\pi}{2}.\end{aligned}$$

令 $k=k'+1$，则

$$\frac{\mathrm{d}(\cos_\alpha t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k'=-1}^{\infty} \frac{t^{k'-\alpha}}{\Gamma(k'+1-\alpha)} \cos \frac{(k'+1-\alpha)\pi}{2}.$$

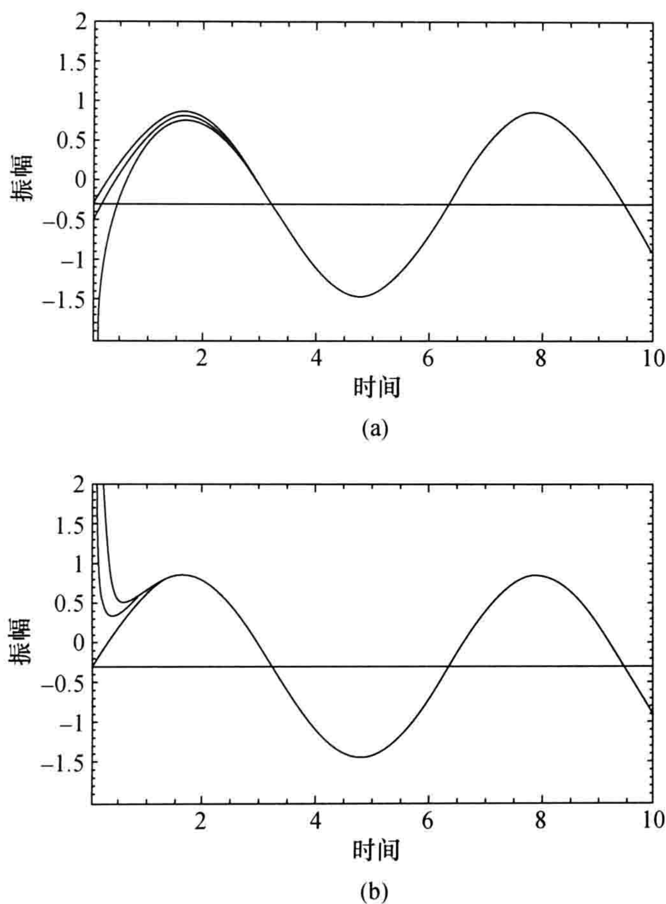


图 11.5　$\sin_\alpha t$ 图

(a) $\alpha=0,0.1,0.5$；(b) $\alpha=0,\alpha=1.1,\alpha=1.5$

将 $k'=-1$ 从上面级数中分离，并利用三角恒等式

$$\cos\frac{(k'+1-\alpha)\pi}{2}=-\sin\frac{(k'-\alpha)\pi}{2},$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}(\cos_\alpha t)}{\mathrm{d}t}=-\sin_\alpha t+\frac{\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+1}}. \tag{11.112}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\sin_\alpha t)}{\mathrm{d}t}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k-\alpha)t^{k-\alpha-1}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\sin\frac{(k-\alpha)\pi}{2}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-\alpha-1}}{\Gamma(k-\alpha)}\sin\frac{(k-\alpha)\pi}{2}.\end{aligned}$$

同样，令 $k=k'+1$，得到

$$\frac{\mathrm{d}(\sin_\alpha t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k'=-1}^{\infty} \frac{t^{k'-\alpha}}{\Gamma(k'+1-\alpha)} \sin\frac{(k'+1-\alpha)\pi}{2}.$$

将 $k'=-1$ 从级数中分离，并利用三角恒等式

$$\sin\frac{(k'+1-\alpha)\pi}{2}=\cos\frac{(k'-\alpha)\pi}{2},$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}(\sin_\alpha t)}{\mathrm{d}t}=\cos_\alpha t-\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+1}}. \tag{11.113}$$

从(11.112)和(11.113)式看出，和普通的三角函数相比，广义三角函数多出了 t 的负幂次项. 这项反映了记忆性，只有当 $t\to\infty$ 时才趋于零，即

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}(\cos_\alpha t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\mathrm{d}t}=-\sin t,$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}(\sin_\alpha t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t}=\cos t. \tag{11.114}$$

(4) 广义双曲函数.

现在将一般双曲函数

$$\sinh t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}),$$
$$\cosh t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}) \tag{11.115}$$

扩展到广义双曲函数

$$\sinh_\alpha t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}_\alpha^t - \dot{\mathrm{e}}_\alpha^{-t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k+2-\alpha)}$$
$$\cosh_\alpha t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}_\alpha^t + \dot{\mathrm{e}}_\alpha^{-t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k-\alpha}}{\Gamma(2k+1-\alpha)}. \tag{11.116}$$

在(11.116)式中 $\mathrm{e}_\alpha{}^t$ 的定义见(11.51)式，类似地，$\dot{\mathrm{e}}_\alpha{}^{-t}$ 的定义为

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{e}}_\alpha^{-t} &= \frac{\mathrm{d}^\alpha(\mathrm{e}^{-t})}{\mathrm{d}t^\alpha} = \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!}\right)\\ &= (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\\ &= (-1)^\alpha \mathrm{e}_\alpha^{-t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\pi}\mathrm{e}_\alpha^{-t}.\end{aligned} \tag{11.117}$$

利用关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}_\alpha^{\pm \mathrm{i}t})=\pm\mathrm{i}\left(\mathrm{e}_\alpha^{\pm \mathrm{i}t}+\frac{1}{\Gamma(-\alpha)(\pm\mathrm{i})^\alpha t^{\alpha+1}}\right) \tag{11.118}$$

就可导得广义双曲函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}(\cosh_\alpha t)}{\mathrm{d}t}=\sinh_\alpha t+\frac{1}{\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+1}}, \tag{11.119}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sinh_\alpha t)}{\mathrm{d}t}=\cosh_\alpha t. \tag{11.120}$$

从(11.119),(11.120)式看出,只有广义双曲余弦函数的导数多出一项负幂项,而广义双曲正弦的导数却没有多出一项. 这是由于广义余弦函数的对称性,而双曲正弦函数只有反对称性.

§ 11.6　从分数阶导数看记忆性

我们从一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t) \tag{11.121}$$

得知,若 $t=0$ 时 $y=y_0$,那么它就有唯一的解 $y(t)$,该解仅仅由 $t=0$ 时刻的状态决定. 这是一个无记忆性的系统. 但是如果我们把(11.121)式改成分数阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha y}{\mathrm{d}t^\alpha}=f(t),\quad 0<\alpha<1, \tag{11.122}$$

那么左边积分 α 次,按(11.60)式就得到

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t M(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{11.123}$$

其中,$M(t-\tau)$称为记忆性函数. (11.123)式说明,y 是 M 和 f 的卷积,

$$y(t)=M(t)*f(t). \tag{11.124}$$

由(11.123)式,对于 $t_2>t_1$,有

$$y(t_2)-y(t_1)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{11.125}$$

将第一个积分区间分成两段,则(11.125)式变成

$$\begin{aligned} y(t_2)-y(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-\tau)^{\alpha-1}-(t_1-\tau)^{\alpha-1}]f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{11.126}$$

显然当 $\alpha=1$ 时,(11.126)式的第一个积分为零,则

$$y(t_2)-y(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{11.127}$$

(11.127)式说明,若知道初值问题(11.127)的解 $y(t_1)$,那么就可以仅仅由 $y(t_1)$ 和函数 $f(t)$来决定 $y(t_2)$,而不需要 $y(t)$在时刻 t_1 之前的任何信息. 因而,这是一个无记忆性系统.

完全无记忆性的一个情况是记忆性函数是 δ 函数,即

$$M(t-\tau)=\delta(t-\tau). \tag{11.128}$$

此时由(11.123)式,得

$$y(t)=\int_0^t\delta(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=f(\tau). \tag{11.129}$$

(11.129)式说明,t 时刻的状态 $y(t)$完全由函数在 t 时刻的值 $f(t)$决定. 但是若将记忆性函数改为

$$M(t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & 0<\tau<t,\\ 0, & \tau>t,\end{cases} \tag{11.130}$$

且 M 满足归一化条件

$$\int_0^t M(\tau)\mathrm{d}\tau=1, \tag{11.131}$$

由(11.123)式,得

$$y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{11.132}$$

(11.133)式说明 $y(t)$完全由 0 时刻到 t 时刻的连续状态决定. 这种情况称为完全有记忆性.

如果(11.123)式的记忆性函数是幂函数

$$M(t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}, \tag{11.133}$$

那么从(11.126)看出,在 $0<\alpha<1$ 时,通常(11.126)式右端的第一个积分不为零,当我们计算 $y(t_2)$时,必须考虑 y 从 $t=0$ 直到 $t=t_2$ 的整个历史. 因此我们常说分数维的重要特征之一是有记忆性.

§11.7 分数阶微分方程

含有分数阶导数的微分方程常出现在许多物理问题中,求解它们的方法主要是§11.4 中介绍的傅里叶变换和拉普拉斯变换,还有幂级数展开法. 下面我

们举例说明.

第一个例子. 考虑方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}} f(t)}{\mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}} + af(t) = 0, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^{-\frac{1}{2}} f}{\mathrm{d}t^{-\frac{1}{2}}}\right|_{t=0} = c. \end{cases} \tag{11.134}$$

对方程组(11.134)做拉普拉斯变换,得到

$$s^{\frac{1}{2}} L(f) - s^0 \left.\frac{\mathrm{d}^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}t^{-\frac{1}{2}}}\right|_{t=0} + aL(f) = 0,$$

所以

$$L(f) = \frac{c}{s^{\frac{1}{2}} + a}. \tag{11.135}$$

由于$\dfrac{c}{s^{\frac{1}{2}} + a}$的逆变换按(11.97)式为

$$L^{-1}\left(\frac{c}{s^{\frac{1}{2}} + a}\right) = ct^{-\frac{1}{2}} \mathrm{E}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-a\sqrt{t}), \tag{11.136}$$

所以方程(11.134)的解为

$$f(t) = ct^{-\frac{1}{2}} \mathrm{E}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-a\sqrt{t}), \tag{11.137}$$

其中 $\mathrm{E}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ 是两参数米塔-列夫勒函数(11.95)式.

第二个例子. 考虑分数阶福克-普朗克方程

$$\frac{\partial^\beta p}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^\alpha p}{\partial x^\alpha}, \tag{11.138}$$

其中 p 是概率密度函数,详见第五章.

对(11.138)式中的 x 做傅里叶变换,得

$$\frac{\mathrm{d}^\beta \Phi(k,t)}{\mathrm{d}t^\beta} = -|k|^\alpha \Phi(k,t), \tag{11.139}$$

其中 Φ 是特征函数,是 p 的傅里叶变换. (11.139)式是分数阶常微分方程,对(11.139)式做拉普拉斯变换,并利用(11.84)式,得

$$s^\beta L(\Phi) + s^{\beta-1}\Phi(0) = -|k|^\alpha L(\Phi), \tag{11.140}$$

其中 $\Phi(0)$是初始时刻的 Φ 值.

由(11.140)式,解出

$$\begin{aligned} L(\Phi) &= \frac{s^{\beta-1}\Phi(0)}{s^\beta + |k|^\alpha} = \frac{s^{-1}}{1 + |k|^\alpha s^{\beta-1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-|k|^\alpha)^n s^{-(\beta n+1)}. \end{aligned} \tag{11.141}$$

对(11.141)式级数中的每一项做逆变换,并注意

$$L^{-1}(s^{-\mu})=\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)},\tag{11.142}$$

得到

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\beta n+1)}(-|k|^{\alpha}t^{\beta})^{n}\\ &= \mathrm{E}_{\beta}(-|k|^{\alpha}t^{\beta}),\end{aligned}\tag{11.143}$$

其中 E_{β}是米塔-列夫勒函数,见(11.93)式. 当 $\beta=1$ 时

$$\Phi(t)=E_1(-|k|^{\alpha}t)=\mathrm{e}^{-|k|^{\alpha}t},\tag{11.144}$$

见(11.87)式. 因此求解(11.138)方程要先做傅里叶变换,再做拉普拉斯变换,然后再做逆变换.

第三个例子. 考虑分数阶常微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^{\alpha}(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=f(t),\\ x(0)=0.\end{cases}\tag{11.145}$$

我们假设 $f(t)$可展成幂级数(泰勒级数)

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^{n}.\tag{11.146}$$

由(11.67)式知,x^{p}的 α 阶导数是 $x^{p-\alpha}$. 为了与级数(11.146)中的 t^{n} 相配合,我们也设 $x(t)$是一个幂级数

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}t^{n+\alpha}.\tag{11.147}$$

将(11.146)和(11.147)式代入(11.145)式,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\frac{(1+n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}t^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^{n}.\tag{11.148}$$

比较(11.148)式等号两边系数,得

$$a_{n}=\frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(1+n+\alpha)},\tag{11.149}$$

所以,解(11.147)式为

$$x(t)=t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(1+n+\alpha)}t^{n}.\tag{11.150}$$

该解满足(11.145)式的初条件 $x(0)=0$.

§ 11.8 分数阶积分和导数的标度不变性

我们知道,幂函数具有标度不变性. 即

$$f(\lambda t)=\lambda^{n} f(t). \tag{11.151}$$

下面我们说明,分数阶积分和分数阶导数也具有这条性质.

按照分数 α 阶积分表达式(11.60),有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{-\alpha} f(\lambda t)}{\mathrm{d} t^{-\alpha}} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t}(t-z)^{\alpha-1} f(\lambda z) \mathrm{d} z \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{\lambda t}\left(\frac{\lambda t-\lambda z}{\lambda}\right)^{\alpha-1} f(\lambda z) \frac{\mathrm{d} \lambda z}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{\lambda t} \frac{\lambda}{\lambda}^{1-\alpha}(\lambda t-\lambda z)^{\alpha-1} f(\lambda z) \mathrm{d}(\lambda z) \\
&= \lambda^{-\alpha} \int_{a}^{\lambda t}(\lambda t-\lambda z)^{\alpha-1} f(\lambda z) \mathrm{d}(\lambda z) \\
&= \lambda^{-\alpha} \frac{\mathrm{d}^{-\alpha} f(\lambda t)}{\mathrm{d}(\lambda t)^{-\alpha}}.
\end{aligned} \tag{11.152}$$

(11.152)式说明 $f(\lambda t)$对 t 的 α 阶积分是 $f(\lambda t)$对(λt)的 α 阶积分的 $\lambda^{-\alpha}$倍,因而分数阶积分具有标度不变性.

我们知道两个函数 $f(t)$和 $g(t)$乘积的分数阶导数,按莱布尼茨规则有

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} f(t) g(t)}{\mathrm{d} t^{\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} \frac{\mathrm{d}^{\alpha-k} g}{\mathrm{d} t^{\alpha-k}} \frac{\mathrm{d}^{k} f}{\mathrm{d} t^{k}}. \tag{11.153}$$

若在(11.153)式中取 $g(t)=t^{0}$,则(11.153)式变成

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} f(t)}{\mathrm{d} t^{\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^{k} f}{\mathrm{d} t^{k}}. \tag{11.154}$$

(11.154)式正是 $f(t)$的 α 阶导数的表达式(11.61)式. 将(11.154)式中的 $f(t)$换成 $f(\lambda t)$,得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{\alpha} f(\lambda t)}{\mathrm{d} t^{\alpha}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^{k} f(\lambda t)}{\mathrm{d} t^{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \lambda \frac{\mathrm{d}^{k} f(\lambda t)}{\mathrm{d}(\lambda t)^{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} \frac{\lambda^{\alpha}(\lambda t)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^{k} f(\lambda t)}{\mathrm{d}(\lambda t)^{k}} \\
&= \lambda^{\alpha} \frac{\mathrm{d}^{\alpha} f(\lambda t)}{\mathrm{d}(\lambda t)^{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{11.155}$$

(11.155)式说明 $f(\lambda t)$ 对 t 的 α 阶导数等于 $f(\lambda t)$ 对 (λt) 的 α 阶导数的 λ^{α} 倍,因而分数阶导数也具有标度不变性.

小 结

分数阶微积分来源于多尺度系统,像异常扩散、天气和气候的关系、黏弹性介质等. 黎曼-刘维尔分数阶导数定义可以从整数阶导数导出. 从物理上讲,物理量随时间的一阶导数为零表示该物理量是守恒的. 但是在多尺度系统中,若物理量的 α 阶 $(0<\alpha<1)$ 导数为零,那么该物理量 $\propto t^{\alpha-1}$. 它反映出该物理量的长期记忆性,$t^{\alpha-1}$ 就是一个长期记忆的幂函数. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t)$ 是无记忆性系统,而微分方程 $\frac{\mathrm{d}^{\alpha}y}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=f(t)$ 却是有记忆性的系统.

第十二章　分数阶动力学

上章我们谈到物理学中分数阶导数的来源，在异常扩散、天气和气候、黏弹性介质中均要用到分数阶导数，它改变了物理学中一些传统的认识. 为了探讨和分形有关的多尺度物理现象，我们不能采用传统的常微分或偏微分方程模型来描述事物的演化. 虽然传统的模型对描述分形系统中个别质点还是有效的，但是对于大尺度现象的涌现，如相变、地震、异常扩散、湍流等的刻画必须借助于分数阶导数的模型.

§12.1　湍流速度场的分数阶导数

§2.6 中介绍过，1926 年里查孙建议用魏尔斯特拉斯函数

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^n}[1-\cos(b^n t)] \tag{12.1}$$

来描述大气湍流速度场，其中 $b>a>1$. (2.48)式说明 $w(t)$ 遵守下列标度关系：

$$w(bt)=aw(t). \tag{12.2}$$

(12.2)式就是魏尔斯特拉斯函数的重正化群关系.

我们曾在第八章说明，湍流的功率谱指数 $\beta=\frac{5}{3}$，标度指数 $H=\frac{1}{3}$，而且在第五章说明，布朗运动微商 $\alpha=\frac{1}{6}$ 次就得到湍流信号，如果用(12.1)式作为速度场，速度场的分数阶导数和积分、速度场的维数会如何变化呢？

由(2.47)式，$w(t)$ 还可以写成

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{b^{(2-D)n}}[1-\cos(b^n t)]. \tag{12.3}$$

由于在平面上湍流速度场的维数 $D=2-H=\frac{5}{3}$，所以(12.1)，(12.3)式相比较，得

$$\begin{aligned}&a=b^{(2-D)},\\&b>a.\end{aligned} \tag{12.4}$$

按照黎曼-刘维尔分数阶积分的定义(11.60)式，对(12.3)式积分 α 次的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}w}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{w(z)}{(t-z)^{1-\alpha}}\mathrm{d}z. \tag{12.5}$$

对(12.3)式微分 α 次的表达式按(11.61)式为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}w}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t}\frac{w(z)}{(t-z)^{\alpha}}\mathrm{d}z. \tag{12.6}$$

从第五章知,随机变量积分 α 次和微分 α 次的功率谱指数 β 将分别上升为 $\beta+2\alpha$ 和下降为 $\beta-2\alpha$. 对于湍流,功率指数 β 和维数 D 的关系为

$$\beta=2H+1=2(2-D)+1=5-2D. \tag{12.7}$$

由(12.7)式看出,β 和 D 成正比,但符号相反,即 β 上升(积分)则 D 下降,β 下降(微分)则 D 上升.

经过分析,(12.5)式和(12.6)式分别为

$$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}w}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{b^{[2-(D-\alpha)]n}}[1-\cos(b^{n}t)], \tag{12.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}w}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{b^{[2-(D+\alpha)]n}}[1-\cos(b^{n}t)]. \tag{12.9}$$

(12.8)式和(12.9)式说明,w 积分 α 次,维数

$$D\to D-\alpha, \tag{12.10}$$

而 w 微分 α 次,维数

$$D\to D+\alpha. \tag{12.11}$$

积分是一个平滑过程,它减小了速度场的不规则性,因而分数维数减小;微分是增加速度场的不规则性,故分数维增加.

虽然 w 是二维平面上的分数维曲线,$1<D<2$,但是对讨论三维空间中的湍流还是有意义的.

这里给我们的启发是:

(1) 处处不可微的函数却满足自相似的标度律;

(2) 处处不可微的分形函数的分数阶导数是另一个分形函数,因而采用分形函数及其分数阶导数的动力学模型是有希望的.

§12.2 分数维布朗运动的朗之万方程的解

在§5.4中,我们将分数维布朗运动 $B_{\alpha}(t)$ 写成分数阶朗之万方程

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}B_{\alpha}}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\varepsilon(t), \tag{12.12}$$

其中 ε 是白噪声. 分数维布朗运动可以看成是 ε 的 α 阶积分,

$$B_\alpha(t)=\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}\varepsilon}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{\varepsilon(z)}{(t-z)^{1-\alpha}}\mathrm{d}z. \tag{12.13}$$

设 $\varepsilon(t)$的傅里叶变换为

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varepsilon}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ft}\mathrm{d}f, \tag{12.14}$$

那么按(12.13)式,$\varepsilon(t)$的 α 阶积分就是分数维布朗运动,即

$$B_\alpha(t)=\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}\varepsilon}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-\mathrm{i}f)^{-\alpha}\hat{\varepsilon}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ft}\mathrm{d}f. \tag{12.15}$$

由(12.15)式,可以计算自相关函数

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\langle B_\alpha(t)B_\alpha(t+\tau)\rangle\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(f_1-f_2)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}f_2\tau}f_1^{-\alpha}\ f_2^{-\alpha}\langle\hat{\varepsilon}(f_1)\hat{\varepsilon}(f_2)\rangle\right]\mathrm{d}f_2\right]\mathrm{d}f_1.\end{aligned}$$

因为

$$\langle\hat{\varepsilon}(f_1)\hat{\varepsilon}(f_2)\rangle=c\delta(f_1-f_2),$$

所以

$$R(\tau)=\frac{c}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ft}f^{-2\alpha}\mathrm{d}f\propto\tau^{2\alpha-1}. \tag{12.16}$$

(12.16)式和 α 阶差分方程(9.45)式的自相关函数(9.52)式一致,因此分数阶微分方程(12.12)的解就是(12.8)式,即

$$B_\alpha=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{b^{[2-(D-\alpha)]n}}[1-\cos(b^nt)]. \tag{12.17}$$

也就是说,魏尔斯特拉斯函数(12.1)是可以看成是白噪声的 α 阶分数阶积分.

§ 12.3　等时降速的轨迹问题

最早应用分数阶积分的人是阿贝尔(Abel). 1823 年,他研究了无摩擦情况下,一个金属丝在第一象限,一个珠子穿在金属丝上,在重力作用下,从高度 h 下降到原点 O,若下降的时间 t 和开始的高度 h 无关,问这个金属丝的形状如何的问题,见图 12.1.

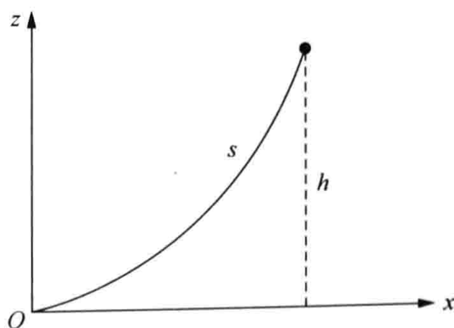


图 12.1　金属丝上的小球从高度 h 下降

由于能量守恒,动能加上势能是常数,即

$$\frac{1}{2}v^2=g(h-z), \tag{12.18}$$

其中 v 是速度. 另外,速度和弧长 s 的关系为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}\right)\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{12.19}$$

由(12.18),(12.19)式,得

$$\sqrt{2g(h-z)}=\left(\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{12.20}$$

将(12.20)式的 t 和 z 分开并积分,得到

$$\int_0^t \sqrt{2g}\,\mathrm{d}t=\int_0^h \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}}{\sqrt{h-z}}\mathrm{d}z=\int_0^h \frac{f(z)}{(h-z)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}z, \tag{12.21}$$

其中

$$f(z)=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\sqrt{f^2(z)-1}. \tag{12.22}$$

由(12.21)式,得

$$\sqrt{2g}t=\int_0^h \frac{f(z)}{(h-z)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}z. \tag{12.23}$$

(12.23)式右端正是黎曼-刘维尔分数阶积分$\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$,即

$$\sqrt{2g}t=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}^{-\frac{1}{2}}f}{\mathrm{d}h^{-\frac{1}{2}}}. \tag{12.24}$$

因为 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$,(12.24)式也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2g}t)}{\mathrm{d}h^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\pi}f(h). \tag{12.25}$$

由于 $\sqrt{2g}t$ 和 h 无关,所以(12.25)式左边就是常数的分数阶导数. 按常数的分数阶导数表达式(11.32),得

$$\sqrt{2g}t\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}h^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}f(h),$$

故求得

$$f(z)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{t}{z^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\sqrt{\frac{t^2}{z}}. \tag{12.26}$$

这样微分方程(12.22)式即为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\sqrt{f^2(z)-1}=\sqrt{\frac{2gt^2}{\pi^2 z}-1}. \tag{12.27}$$

(12.27)式是一个整数阶微分方程,它的参数形式的解是

$$x=a(\vartheta+\sin\theta),$$
$$z=a(1-\cos\theta),$$

其中 $a=\frac{gt^2}{\pi^2}$. 因此 $x(z)$的形状是一个旋轮线(cycloid).

§12.4 分数阶摩擦力和调和振荡

在经典力学中,通常假设摩擦力和速度成正比,但方向相反,即

$$f=-kv=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{12.28}$$

其中速度 v 是位置 x 的一阶导数,k 是摩擦系数. 根据牛顿第二定律,有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f=-kv=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{12.29}$$

容易得到(12.29)式的解为

$$x(t)=x(0)+\frac{m}{k}v(0)(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}). \tag{12.30}$$

显然 $x(0)$,$v(0)$是初始 $t=0$ 时刻的位置和速度.

将(12.30)式对时间微商,得到速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(0)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}. \tag{12.31}$$

当 $t\to\infty$时速度 $v\to 0$,这意味着物体在摩擦力作用下停止了下来.

现在假设摩擦力是分数阶摩擦力,即(12.28)式改为

$$f=-k\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}\quad(0<\alpha<1), \tag{12.32}$$

此时牛顿定律(12.29)式改为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}, \tag{12.33}$$

其中 k 的量纲为 $\mathrm{kg/s}^{2-\alpha}$. 为了求解(12.33)式,我们设

$$x(t)=\mathrm{e}^{\omega t}. \tag{12.34}$$

按照(11.38)式,将(12.34)式代入(12.33)式,得到

$$m\omega^2\mathrm{e}^{\omega t}=-k\omega^\alpha\mathrm{e}^{\omega t},$$

即

$$\omega^{2-\alpha}=-\frac{k}{m}. \tag{12.35}$$

(12.35)式的一个解是

$$\omega=(-1)^{\frac{1}{2-\alpha}}\left|\frac{k}{m}\right|^{\frac{1}{2-\alpha}}. \tag{12.36}$$

在 $0<\alpha<1$ 范围内,(12.35)式有两个共轭复根,即

$$\begin{aligned}\omega_1&=\mu\left(\cos\frac{\pi}{2-\alpha}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2-\alpha}\right),\\ \omega_2&=\mu\left(\cos\frac{\pi}{2-\alpha}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2-\alpha}\right),\end{aligned} \tag{12.37}$$

其中

$$\mu=\left|\frac{k}{m}\right|^{\frac{1}{2-\alpha}}, \tag{12.38}$$

那么方程(12.33)的解为

$$x(t)=c_1+c_2\mathrm{e}^{\omega_1 t}+c_3\mathrm{e}^{\omega_2 t}. \tag{12.39}$$

若我们用卡普托的分数阶导数定义,常数 c 的分数阶导数为零,那么容易验证(12.39)式就是(12.33)式的解.

由于(12.39)式有三个常数,除了初条件 $x(0)$,$v(0)$外,还要加一个初条件,例如 $\ddot{x}(0)=-\frac{k}{m}v^{\alpha}(0)$,那么解(12.39)式近似到二阶项为

$$x(t)=x(0)+v(0)t-\frac{1}{2}\frac{k}{m}v^{\alpha}(0)t^2. \tag{12.40}$$

为了便于比较,我们将(12.30)式也近似到二阶项,得到

$$x(t)=x(0)+v(0)t-\frac{1}{2}\frac{k}{m}v(0)t^2. \tag{12.41}$$

从(12.40)式和(12.41)式比较看出,(12.40)式当 $\alpha=1$ 时就是(12.41)式的结果. 同时,当 $\alpha\to 0$ 时,(12.33)式变成

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx, \tag{12.42}$$

表示调和振荡.

引进 α 阶分数阶导数后,可以使物理问题在 $0<\alpha<1$ 的较宽范围内来讨论.

在整数阶牛顿力学中,(12.42)式是单摆振荡或弹簧振荡的基本方程. 若把(12.42)式中的二阶导数改变成 2α 阶导数,得到

$$\frac{\mathrm{d}^{2\alpha}x}{\mathrm{d}t^{2\alpha}}+\frac{k}{m}x=0. \tag{12.43}$$

这就成为分数阶调和振荡的基本方程.

我们设方程(12.43)式的解为

$$x(t)=e^{\omega t},\tag{12.44}$$

将其代入(12.43)式,得到

$$\omega^{2\alpha}e^{\omega t}+\frac{k}{m}e^{\omega t}=0,$$

即

$$\omega^{2\alpha}+\frac{k}{m}=0.\tag{12.45}$$

方程(12.45)在$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$范围内有两个共轭复根解:

$$\omega_{1,2}=\left|\frac{k}{m}\right|^{\frac{1}{2\alpha}}\left(\cos\frac{\pi}{2\alpha}\pm i\sin\frac{\pi}{2\alpha}\right).\tag{12.46}$$

我们对(12.46)式分几种情况讨论.

(1) 当$\alpha=1$时,(12.46)式的实部为零,仅有虚部,这相当于整数阶导数(12.42)式中的无阻尼调和振荡.

(2) 当$\alpha<1$时,(12.46)式的实部为负,从经典力学观点看,(12.44)式相当于阻尼振荡.

(3) 当$\alpha>1$时,(12.46)式的实部为正,它相当于负阻尼或激励振荡. 这在经典力学中是不讨论的,但是实际中存在负阻尼的情况.

我们看到,引入分数α阶导数,使得无阻尼问题的讨论包括了无阻尼和正负阻尼三种情况.

§12.5　分数阶弛豫过程

下列方程是弛豫方程:

$$\frac{dx}{dt}+\lambda x=0,\tag{12.47}$$

其中弛豫频率λ决定这个过程恢复到它的平衡态的快慢,$\lambda=\frac{1}{\tau}$,τ称为弛豫时间. 方程(12.47)的解是

$$x(t)=x(0)e^{-\lambda t}.\tag{12.48}$$

若(12.48)式中的初条件$x(0)$解释为随机过程的事件出现率λ,那么方程(12.47)也可解释为泊松随机过程的方程,见(8.151)式.

对于分数阶的弛豫过程,要将方程(12.47)式改写成

$$\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}}+\lambda x=0\quad(0<\alpha<1),\quad x(0)=1.\tag{12.49}$$

显然$\alpha=1$时,(12.49)式就化为(12.47)式.

为了求解(12.49)式,我们对其做拉普拉斯变换. 按(11.84)式,得

$$s^{\alpha}L(x)-s^{\alpha-1}x(0)+\lambda L(x)=0. \tag{12.50}$$

由(12.50)式,求得 x 的拉普拉斯变换为

$$L(x)=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda}. \tag{12.51}$$

对(12.51)式做逆变换,求得

$$x=\mathrm{E}_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha}), \tag{12.52}$$

其中 E_{α} 是单参数米塔-列夫勒函数.

图 12.2 是用线性坐标和对数坐标在 $\lambda=1$ 时,对于 $\alpha=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$ 绘出的(12.52)式的图像. 从图 12.2 看出,$0<\alpha<1$ 时,弛豫过程比 $\alpha=1$ 时慢.

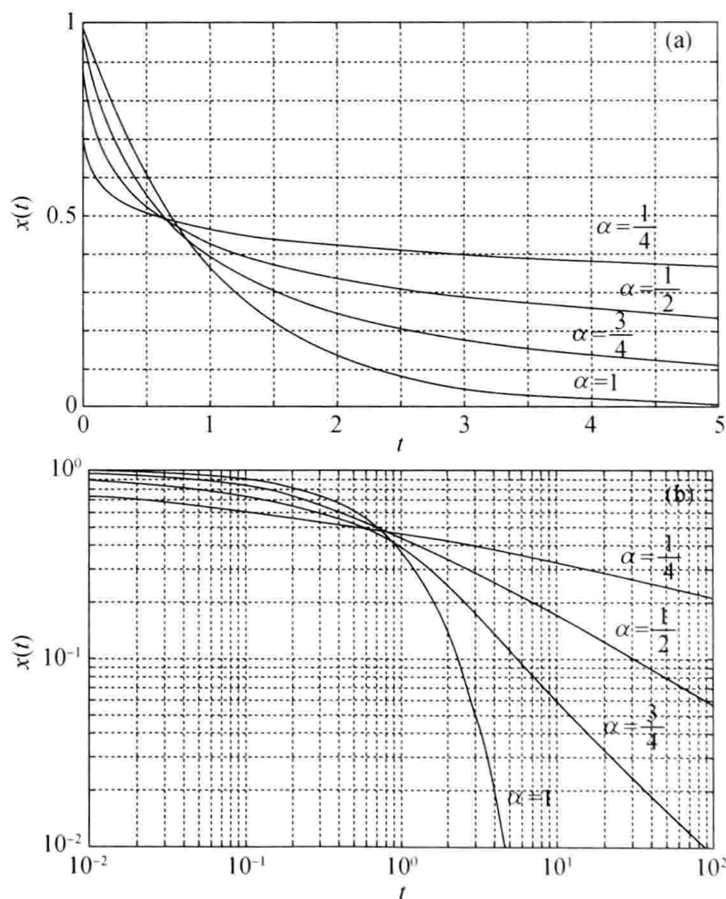


图 12.2 (12.52)式 x 随 t 的变化

(a) 线性坐标;(b) 对数坐标

还有另一种方法来描述分数阶弛豫过程，即把方程(12.49)式的初条件做修改，考虑

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}+\lambda x=0 \quad (0<\alpha<1), \tag{12.53}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{(\alpha-1)}x}{\mathrm{d}t^{\alpha-1}}\right|_{t=0}=1. \tag{12.54}$$

对(12.53)式做拉普拉斯变换，按(11.85)式，得到

$$s^{\alpha}L(x)-s^{0}\left.\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}x}{\mathrm{d}t^{\alpha-1}}\right|_{t=0}+\lambda L(x)=0. \tag{12.55}$$

由(12.55)式解出

$$L(x)=\frac{1}{s^{\alpha}+\lambda}, \tag{12.56}$$

再对(12.26)式做逆拉普拉斯变换，按(11.97)式，得到

$$x=t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha}). \tag{12.57}$$

图 12.3 绘制了(12.57)式在 $\lambda=1$ 时的图像.

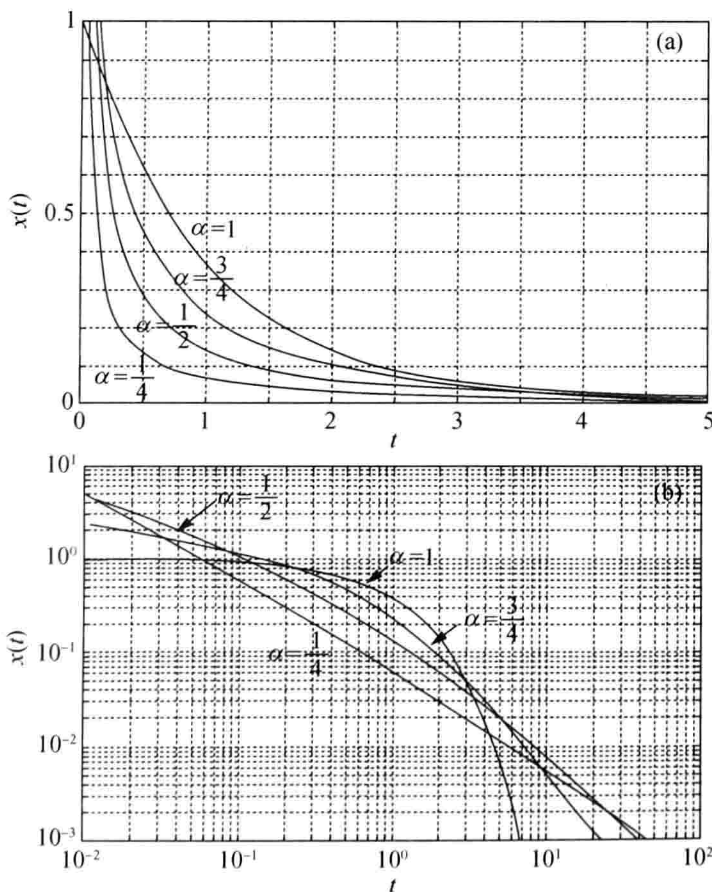


图 12.3　(12.57)式 x 随 t 的变化

(a) 线性坐标；(b) 对数坐标

从图 12.2 和图 12.3 比较看出，图 12.3 的特点是 $\alpha=1$ 时，$t\to 0$ 则 $x\to 1$，但是当 $0<\alpha<1$ 时，$t\to 0$ 则 $x\to\infty$，另外 $0<\alpha<1$ 时，x 随 t 衰减得比 $\alpha=1$ 时慢.

§12.6 分数维电学

1889 年，居里(Curie)提出了通过电容器的电流的经验定律

$$I(t)=\frac{V(0)}{ht^{\alpha}}, \tag{12.58}$$

其中 $V(0)$是初始 $t=0$ 时的直流电压，h 和 α 是常数，且 $0<\alpha<1$. 近 10 年来，某些问题中，(12.58)式被修改为

$$I(t)=c\,\frac{\mathrm{d}^{\alpha}V(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}, \tag{12.59}$$

其中$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}V(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}$是分数阶导数，$c$ 是电容器电容. 输入电压 $V(t)$也可以表示成电流 I 的分数阶积分

$$V(t)=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}I}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}. \tag{12.60}$$

类似地，电感器两端的电压

$$V(t)=L\,\frac{\mathrm{d}^{\alpha}I}{\mathrm{d}t^{\alpha}}, \tag{12.61}$$

其中 L 是电感器的电感.

§12.7 分形介质的流体力学方程组

在流体力学中我们通常将水和大气等流体作为连续介质处理. 但是像多孔材料、聚合物、胶体聚合体等介质，由于并不充满整个空间，所以不能看成是连续介质. 这一类介质称为分形介质. 把流体看做连续介质的流体动力学方程并不能直接用于分形介质.

从第一章知道，由于质点并不充满空间，分数维质点只占空间的一部分. 若原来体积元、面积元以及线元分别为 $\mathrm{d}V,\mathrm{d}S,\mathrm{d}L$，那么分数维的介质在 $r\leqslant R$ 内的球体内，分形质点所占体积、面积、线段分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_D&=C_3\,\mathrm{d}V,\\ \mathrm{d}S_d&=C_2\,\mathrm{d}S,\\ \mathrm{d}L_{\alpha}&=C_1\,\mathrm{d}L,\end{aligned} \tag{12.62}$$

其中 C_3,C_2,C_1 是相应的归一化的概率密度，即

$$C_3=\frac{2^{3-D}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}r^{D-3},$$

$$C_2=\frac{2^{2-d}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}r^{d-2}, \tag{12.63}$$

$$C_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}r^{\alpha-1},$$

而 D,d 和 α 是分数维. 若密度 ρ 为常数,$r\leqslant R$ 球内的质量可以写成

$$\begin{aligned}M&=\int_{V_D}\rho\mathrm{d}V_D\\&=\rho\frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}\int_{V_D}r^{D-3}\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{12.64}$$

若用球坐标

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=4\pi r^2\mathrm{d}r,$$

则(12.64)式变成

$$\begin{aligned}M&=\rho\frac{2^{3-D}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}2^2\pi\int_0^R r^{D-1}\mathrm{d}r\\&=\rho\frac{2^{5-D}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\pi}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\int_0^R r^{D-1}\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{12.65}$$

(12.65)式右端是分数阶积分,阶数为 D,积分结果为

$$M=\frac{2^{5-D}\pi\left(\frac{3}{2}\right)}{\mathrm{d}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\rho R^D. \tag{12.66}$$

这样通过分数维的积分来表示质量 M,分形介质就可以看成连续介质.

下面讨论几个连续介质的流体力学概念和方程,看看它们如何适应分形介质.

(1) 全导数(或物理量的随体微商).

在连续介质的流体力学中,一个物理量 A(标量或向量)的随体微商,即全导数可以写成

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial A}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla A=\frac{\partial A}{\partial t}+u\frac{\partial A}{\partial x}+v\frac{\partial A}{\partial y}+w\frac{\partial A}{\partial z}, \tag{12.67}$$

其中$\frac{\partial A}{\partial t}$代表物理量的局地(固定地点)变化,$\boldsymbol{v}\cdot\nabla A$ 代表固定时刻的迁移变化,∇ 是梯度算子,

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{12.68}$$

$\boldsymbol{v}(u,v,w)$是速度场.

对于分形介质,物理量 A 的全导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_D}A\,\mathrm{d}V_D=\int_{V_D}\frac{\partial A}{\partial t}\mathrm{d}V_D+\int_{S_d}Av_n\mathrm{d}S_d, \tag{12.69}$$

其中 V_D是分型介质中质点所占体积,S_d是 V_D的边界,v_n 是 $\boldsymbol{v}$ 在边界法向的投影. (12.69)式右端第二项利用(12.62)式,有

$$\int_{S_d}Av_n\mathrm{d}S_d=\int_S C_2Av_n\mathrm{d}S,$$

再利用连续介质高斯定理,得到

$$\int_S C_2Av_n\mathrm{d}S=\int_V\nabla\cdot(C_2A\boldsymbol{v})\mathrm{d}V. \tag{12.70}$$

利用(12.62)式,(12.69)式右端的第二项为

$$\int_{S_d}Av_n\mathrm{d}S_d=\int_{V_D}\frac{1}{C_3}\nabla\cdot(C_2A\boldsymbol{v})\mathrm{d}V_D. \tag{12.71}$$

这样(12.69)式左右两边全部为分数维体积 V_D的积分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_D}A\,\mathrm{d}V_D=\int_{V_D}\left[\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{C_3}\nabla\cdot(C_2A\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V_D. \tag{12.72}$$

在(12.72)式中,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(C_2A\boldsymbol{v})=&A\frac{\partial(C_2u)}{\partial x}+A\frac{\partial(C_2v)}{\partial y}+A\frac{\partial(C_2w)}{\partial z}\\&+C_2u\frac{\partial A}{\partial x}+C_2v\frac{\partial A}{\partial y}+C_2w\frac{\partial A}{\partial z},\end{aligned} \tag{12.73}$$

因此我们用符号

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_D=\frac{\partial}{\partial t}+C\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{12.74}$$

和

$$\mathrm{Div}_D\boldsymbol{v}=\frac{1}{C_3}\nabla\cdot(C_2\boldsymbol{v}) \tag{12.75}$$

分别表示分形介质的全导数和广义的散度,其中 $C=\frac{C_2}{C_3}$,此时(12.72)式变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v_D}A\,\mathrm{d}V_D=\int_{V_D}\left[\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{C_2}{C_3}\left(u\frac{\partial A}{\partial x}+v\frac{\partial A}{\partial y}+w\frac{\partial A}{\partial z}\right)+A\mathrm{Div}_D\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V_D$$

$$= \int\limits_{V_D} \left[\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \right)_D + A\mathrm{Div}_D \boldsymbol{v} \right] \mathrm{d}V_D. \tag{12.76}$$

(12.74)和(12.76)分别是分形介质全导数的微分形式和积分形式. 特别地，当 $D=3, d=2$ 时，由(12.63)式 $C_3=1, C_2=1$，因而 $C=1$，那么(12.74)式就化为连续介质的全导数公式，且广义散度 $\mathrm{Div}_D \boldsymbol{v}$ 就化为连续介质普通散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$.

(2) 分形介质的质量守恒定律.

我们把(12.76)式中的 A 用密度 ρ 代替，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_D} \rho \mathrm{d}V_D = \int\limits_{V_D} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right)_D \rho + \rho \mathrm{Div}_D \boldsymbol{v} \right] \mathrm{d}V_D. \tag{12.77}$$

若(12.77)式左边为零，就表示质量守恒. 由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_D} \rho \mathrm{d}\boldsymbol{v}_D = 0$ 导得

$$\int\limits_{V_D} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right)_D \rho + \mathrm{Div}_D \boldsymbol{v} \right] \mathrm{d}V_D = 0 \tag{12.78}$$

及

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right)_D \rho + \mathrm{Div}_D \boldsymbol{v} = 0. \tag{12.79}$$

(12.78)和(12.79)式就是分形介质质量守恒定律的积分形式和微分形式. 若 $D=3, d=2$，则(12.78)和(12.79)式就化为连续介质的质量守恒定律和连续性方程.

(3) 分形介质的动量守恒方程.

分形介质动量守恒方程类似于质量守恒方程，也是由分形积分导出的，可以写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right)_D \boldsymbol{v} = \frac{C}{\rho} \nabla P + \nu C \nabla^2 \boldsymbol{v}. \tag{12.80}$$

显然当 $D=3, d=2$ 时，(12.80)式就化为流体力学的纳维-斯托克斯方程.

§ 12.8　异常扩散方程

虽然我们在前面多次提到各种异常扩散，但是本节将系统地从热力学和动力学的观点导出异常扩散方程.

从第一章知道，位移扩散方差 $\langle x^2 \rangle$ 和时间 t 的关系为

$$\langle x^2 \rangle \propto t^\sigma, \tag{12.81}$$

当 $\sigma=1$ 时为布朗运动的正常扩散，而当 $\sigma>1$ 和 $\sigma<1$ 时分别称为超扩散和亚扩散，它们在分形介质、多孔介质、固体表面增长、薄液体膜散开等物理问题中都会遇到.

研究异常扩散通常有两种方法:一种是非平衡热力学方法,另一种是动力学方法.

在平衡热力学中,熵 $s(t)$ 通常用连续概率密度分布函数来定义:

$$s=-k\int p(x,t)\ln p(x,t)\mathrm{d}x, \tag{12.82}$$

其中 k 为玻尔兹曼常数. 那么 p 的连续方程可表示为

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{J}, \tag{12.83}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为扩散通量,通常表示为

$$\boldsymbol{J}=l\,\nabla\frac{\partial s}{\partial p}, \tag{12.84}$$

l 是传输系数,通常设为

$$l=\left(\frac{K}{k}\right)p, \tag{12.85}$$

K 是扩散系数. 用(12.82)式求得

$$\nabla\frac{\partial s}{\partial p}=\nabla\left(-k\int(\ln p+1)\mathrm{d}x\right)=-k\,\frac{1}{p}\,\nabla\,p. \tag{12.86}$$

将(12.86),(12.85)式代入(12.84)式,得到

$$\boldsymbol{J}=\frac{K}{k}P\left(-k\,\frac{1}{p}\nabla\,p\right)=-K\,\nabla\,p. \tag{12.87}$$

将(12.87)式代入(12.83)式,导得 p 的扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=K\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{12.88}$$

(12.88)式就是布朗运动扩散方程.

对于非平衡热力学,(12.82)式的熵对于离散的状态集要改为

$$s_q=-\frac{k}{1-q}\sum_i p_i(1-p_i^{q-1}). \tag{12.89}$$

这种广义的熵当 $q\to 1$ 时有

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}s_q&=-\lim_{q\to 1}k\sum_i\frac{p_i(1-p_i^{q-1})}{1-q}\\&=-\lim_{q\to 1}k\sum_i\frac{-p_i^q\ln p_i}{-1}\\&=-k\sum_i p_i\ln p_i.\end{aligned} \tag{12.90}$$

这就是(12.82)式. 此时(12.84)式的 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=l\,\nabla\frac{\partial s_q}{\partial p_i}=\frac{-lk}{1-q}\nabla\left[\sum_i(1-p_i^{q-1})-(q-1)p_i^{q-1}\right]\\&=\frac{lkq}{1-q}\nabla p_i^{q-1}.\end{aligned}$$

若将(12.85)式改成

$$l=\frac{K}{k}p_i^{\alpha}, \tag{12.91}$$

那么(12.83)式就可写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}&=\frac{kq}{1-q}\nabla\cdot(l\nabla p_i^{q-1})\\&=\frac{Kq}{\alpha+q-1}\frac{\partial^2(p^{\alpha+q-1})}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{12.92}$$

其中我们已用 p 代替 p_i. (12.92)式是用非平衡热力学导出的异常扩散的扩散方程,也称多孔介质方程. 式中参数 α 代表异常扩散的影响,即动力学的作用. 若 $\alpha=1$ 且 $q=1$,则(12.92)式就化为(12.85)式. (12.92)式的参数 $q\neq 1$ 时代表热力学的贡献.

请注意,(12.92)式是一个非线性的扩散方程,虽然它不涉及分数阶导数,但是求解仍然是困难的. 与(5.91)式类似,我们对方程(12.92)做标度变换

$$x'=\lambda^{-\mu}x,\quad t'=\lambda^{-1}t,\quad p'=\lambda^{\mu}p, \tag{12.93}$$

其中

$$\mu=\frac{1}{\alpha+q},$$

则方程(12.92)变成

$$\frac{\lambda^{-\mu}}{\lambda}\frac{\partial p'}{\partial t'}=\left(\frac{kq}{\alpha+q-1}\frac{\partial^2 p'^{\frac{1}{\mu}-1}}{\partial x'^2}\right)\frac{\lambda^{-1+\mu}}{\lambda^{2\mu}},$$

因此对 p',x',t' 方程仍有形式

$$\frac{\partial p'}{\partial t'}=\frac{Kq}{\alpha+q-1}\quad\frac{\partial^2 p'^{\alpha+q-1}}{\partial x'^2}, \tag{12.94}$$

即形式不变. 由(12.93)式,方程(12.92)式的解为

$$p(x,t)=\lambda^{-\mu}p(\lambda^{-\mu}x,\lambda^{-1}t). \tag{12.95}$$

令 $\lambda=t$,(12.95)式变为

$$p(x,t)=t^{-\mu}p(xt^{-\mu},1), \tag{12.96}$$

此时扩散方差易由(12.93)式的

$$x(\lambda^{-\mu}t)=\lambda^{-\mu}x \tag{12.97}$$

求出. 因为标度方程(12.97)的解为

$$x=t^{\mu}, \tag{12.98}$$

所以方差

$$\langle x^2\rangle\propto t^{2\mu}. \tag{12.99}$$

和(12.81)式比较,有

$$\sigma=2\mu=\frac{2}{\alpha+q}. \tag{12.100}$$

若 $\alpha+q<2$,则 $\sigma>1$,这是超扩散,若 $\alpha+q>2$,则 $\sigma<1$,这是亚扩散.

从动力学上考虑,常把(12.88)式改为异常扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=K\frac{\partial^{\alpha} p}{\partial x^{\alpha}}. \tag{12.101}$$

对于(12.101)式,我们已经在第五章讨论过.

将列维分布的概率密度函数 p 的标度律

$$p(x,t)=t^{-\frac{1}{\alpha}}p(t^{-\frac{1}{\alpha}}x,1) \tag{12.102}$$

和(12.96)比较看出,现在的 μ 相当于列维分布的 $\frac{1}{\alpha}$,所以非线性扩散方程(12.92)式等价于分数阶扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^{\frac{1}{\mu}} p}{\partial x^{\frac{1}{\mu}}}. \tag{12.103}$$

这就是说,(12.103)式中的 $\frac{1}{\mu}$ 相当于列维扩散方程(5.85)中的 α. 按照(12.100)式,有

$$\frac{1}{\mu}=\alpha+q, \tag{12.104}$$

所以方程(12.103)式的分数阶扩散方程可以写成

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^{\alpha+q} p}{\partial x^{\alpha+q}}. \tag{12.105}$$

因此从热力学的观点也可以导得列维分布的扩散方程形式(12.103)式.

当 $q=0$ 时,(12.105)式变为(12.88)式

$$\frac{\partial p}{\partial t}=K\frac{\partial^{\alpha} p}{\partial p^{\alpha}}. \tag{12.106}$$

(12.106)式我们已经在第五章讨论过. 它的方差为(5.69)式,即

$$\langle r^2\rangle\propto t^{\frac{2}{D}}, \tag{12.107}$$

因此我们只要将(12.106)式的扩散系数 K 改为

$$K(r)=r^{2-D}, \tag{12.108}$$

那么方差

$$\langle r^2\rangle\propto K(r)t=r^{2-D}t. \tag{12.109}$$

(12.109)式和(12.107)式是等价的,这是因为用(12.107)式代入(12.108)式右端,有

$$右边=\langle r^2\rangle^{\frac{2-D}{2}}\langle r^2\rangle^{\frac{D}{2}}=\langle r^2\rangle^{\frac{2-D}{2}+\frac{D}{2}}=\langle r^2\rangle=左边.$$

小　结

对于多尺度系统，许多定律均要修改，如摩擦力$-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$要修改为$-k\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}$. 电容器两端的电流、电感器两端的电压分别修改为$I=C\frac{\mathrm{d}^{\alpha}V}{\mathrm{d}t^{\alpha}}$和$V=L\frac{\mathrm{d}^{\alpha}I}{\mathrm{d}t^{\alpha}}$，统计物理学中的朗之万方程要改为$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}B}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\varepsilon$，弛豫过程要改写成$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}+\lambda^{\alpha}x=0$，流体力学的动力学方程要修改成分形介质的一套方程.

参考文献

[1] Abraham R H, Shaw C D. Dynamics: The geometry of behavior, part one (1982), part two (1983), part three (1985), part four (1988). Santa Cruz: Aerial Press.

[2] Argyris J. An exploration of chaos. Amsterdam: North-Holland, 1994.

[3] Adler R. A practical guide to heavy tails. Berlin: Birkhauser, 1998.

[4] Aharony A, Feder J. Fractals in physics. North Holland: Elsevier Science Publishers, 1990.

[5] Bak P, Tang C. Earthquakes as a self-organized critical phenomena. J. Geophys. Res., 1989, 94: 15635.

[6] Barnsly M. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988.

[7] Bunde A, Havlin S. Fractals and disordered systems. Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.

[8] Cardy J. Scaling and renormalization in statistical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[9] Cencini M. Chaos: From simple models to complex systems. New Jersey: World Scientific, 2010.

[10] Chopard B. Cellular automata modeling of physical system. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[11] Compte A. Stochastic foundations of fractional dynamics. Phys. Rev. E, 1966, 53: 4191.

[12] Devaney R L. Chaos fractals and dynamics. Menlo Park: Addison-Vesley, 1990.

[13] Dewar R L. Complex physical biophysical and econophysical systems. Singapore: World Scientific, 2010.

[14] Ditlevsen P D. Turbulence and shell models. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[15] Drazin P G. Nonlinear system. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[16] Feder J. Fractals. New York: Plenum Press, 1988.

[17] Fish J. Multiscale methods. Oxford: Oxford University Press, 2010.

[18] Forge M. Wavelets, fractals and Fourier transform. Oxford: Clarendom Press, 1993.

[19] Frisch U. Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[20] Gros C. Complex and adaptive dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[21] Harte D. Multifractals theory and applications. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001.

[22] Hasselmann K. Stochastic climate model, part Ⅰ: Theory. Tellus, 1976, 28: 473.

[23] Hoyle R B. Pattern formation to method. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[24] Huang K S. Lectures on statistical physics and protein folding. 上海:复旦大学出版社, 2006.

[25] Kadanoff L P. Fractals: Where's the beef. Physics Today, 1986, Feb, 6.

[26] Kautz R. Chaos: The science of predictable random motion. Oxford: Oxford University Press, 2011.

[27] Lesne A. Renormalization methods. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[28] Lauwerier H. Fractals. Amsterdam: Aramith Uitgevers, 1987.

[29] 刘式达,梁福明,刘式适,辛国君. 大气湍流. 北京:北京大学出版社, 2008 .

[30] 刘式达,梁福明,刘式适,辛国君. 自然科学中的混沌和分形. 北京:北京大学出版社, 2003.

[31] 刘式达,刘式适. 非线性动力学和复杂现象. 北京:气象出版社, 1989.

[32] 刘式达,刘式适. 孤波和湍流. 上海:上海科学技术出版社, 1994.

[33] 刘式适,刘式达. 大气动力学. 北京:北京大学出版社, 1991.

[34] 刘式适,刘式达. 非线性大气动力学. 北京:国防工业出版社, 1996.

[35] 刘式适,刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京:北京大学出版社, 2000.

[36] 刘式达,刘式适. 分形和分维引论. 北京:气象出版社, 1993.

[37] Luo C J. Long-range interactions, stochasticity and fractional dynamics. 北京:高等教育出版社, 2010.

[38] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flows. J. Atmos. Sci. , 1963, 20: 130.

[39] Mahnke R. Physics of stochastic processes. Weinheim: Wiley-Vch, 2009.

[40] Mainard F. Fractional calculus and wave in linear viscoelasticity. London: Imperical College Press, 2011.

[41] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982 .

[42] Mikosch T. Elementary stochastic calculus. Singapore: World Scientific, 1998.

[43] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: John Wiley, 1993.

[44] Monin H K, Yaglom A M. Statistical fluid mechanics. Boston: MIT Press, 1975.

[45] Nishimor H. Elements of phase transition and critical phenomena. Oxford: Oxford University Press, 2011.

[46] Palma W. Long-memory time series. New Jersey: Wiley & Sons, 2007.

[47] Pathria R K. Statistical mechanics. Amsterdam: Elsevier, 2011.

[48] Peitgen H, Jurgens H, Saupe D. Chaos and fractals, new frontiers of science. New York: Springer-Verlag, 1992.

[49] Petras I. Fractional-order nonlinear systems. 北京:高等教育出版社, 2010.

[50] Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999.

[51] Richardson L F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. Proc.

Roy. Soc. London A,1926,110:709.

[52] Ruch D K. Wavelet theory: An elementary approach with application. New Jersey: Wiley & Sons,2009.

[53] Rudnick J. Elements of the random walk. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[54] Schroeder M. Fractals, chaos, power laws. New York: Freeman,1991.

[55] Small M. Applied nonlinear time series analysis. Singapore: World Scientific,2005.

[56] Stanley H E. Introduction to phase transition and critical phenomena. Oxford: Oxford University Press,1979

[57] Stanley H E. From Newton to Mandelbrot. New York: Springer-Verlag,1989.

[58] Tarasov V E. Fractional dynamics, applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. 北京:高等教育出版社,2010.

[59] West B J. Physics of fractals operations. New York: Springer-Verlag,2003.

[60] Wilson K. The renormalization group and critical phenomena. Nobel lectures physics: 1881-1990.

[61] Wolf D. Noise in physical system. New York: Springer,1978.

[62] Zinn-Justin J. Phase transitions and renormalization group. New York: Oxford University Press,2007.

索　　引

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

[General Information]
书名=物理学中的分开
作者=刘式达，刘式适编著
页数=315
SS号=13619138
DX号=
出版日期=2014.07
出版社=北京大学出版社